

שיעור מתמטיקה לא שגרתי בעלות השחר

אגדה מתמטית לילדי גן חובה וכיתות א'–ג'

מוקדש לסאשה גלפנביין לכבוד יום הולדתו השלישי

תרגום מרוסית: יוליה לויט

הקדמה: מקום העלילה

בתחילת המאה הזו, המאה ה-21, בישראל, בלב מדבר הערבה התגלה מעיין מי תהום שזכה לשם "מי נס". מחיר הקרקע, או ליתר דיוק מחיר החולות מסביב למעיין, מיד עלה. הקרקע הייתה שייכת למדינה, והמדינה העבירה אותה למשרד העלייה והקליטה עם הנחיה לבנות על האדמה הזו יישוב שסוגו ורמתו ימשכו עולים אמידים מארצות מערב אירופה וצפון אמריקה להתיישב בו.

היעד היה לשכן עולים לא בערים יוקרתיות דוגמת תל-אביב, קיסריה והרצליה שממוקמות במרכז המדינה אלא להפנות אותם לדרום המדינה שהוא אזור פחות מיושב. משרד העלייה והקליטה איתר חברות בינוי וחברות המתמחות בפיתוח צמחייה במטרה תוך מספר שנים ליצור מסביב למעיין יישוב יוקרתי עם תשתיות מפותחות, יערות ומתקני מים. תוכנן כי ייבנו וילות דו-קומתיות נפרדות כשטחי הצמחייה משמשים כאזורי הפרדה ביניהן. המשימה הייתה לא קלה והושקעו בה אמצעים רבים, אבל היא הושלמה במועד ובהתאם מלא ליעדים שהוצבו.

לקראת סוף העשור הראשון של המאה ה-21 בלב המדבר קם נווה מדבר עם צמחייה עשירה, צעירה אך גדלה מהר.

בין איי הצמחייה המפוארת הזו בלטו בתים דו-קומתיים עם גגות שטוחים גדושים בדודי שמש, אנטנות טלוויזיה ואמצעים אחרים של תקשורת בת-ימינו. הפלא האמיתי היה האגם המלאכותי במרכז היישוב הזה. האגם נוצר על בסיס המעיין שלו חב היישוב את קיומו. באגם השתכשכו דגים מסוגים שונים למטרת נוי ללא כוונת גידול תעשייתי. השם "גן עדן" בהחלט היה מתאים ליישוב, אבל הוא נקרא על שם מעיין מי התהום שלו חב את קיומו: "מי נס".

כמקובל, נערך מסע פרסום רחב ליישוב החדש עם הצעות לרכישת בתים. חרף מחירים גבוהים מאוד נמצאו לא מעט כאלה שרצו לרכוש בית ביישוב מי נס. העדיפות ניתנה לעולים חדשים שלהם הוצעו הנחות בקניית בית מגורים.

משפחת גרוס הייתה לאחת המשפחות האחרונות שנענו לקריאה זו. לרגע זה הם היו שלושה אנשים: פיליפ, או פיל, גרוס בן 35, אשתו אן גרוס בת 30, בתם אליס בת 5 ושתי חיות המחמד של המשפחה – הכלבה אוגוסטה והחתול תומאס. הכלבה זכתה לכינוי שלה הודות למראה המלכותי – פרווה עדינה ורכה בצבע צהוב בהיר, תווי פנים אציליים, אף מוארך, עיניים אפורות מרוחקות אחת מהשנייה, שפתיים דקות המסתירות שיניים צחורות.

אפשר היה להגיד שהחתול תומאס הוא חתול שחור אלמלא פס של פרווה לבנה על צווארו. הפס נראה כמו קולר לבן. חוץ מזה, היה לחתול גם כתם לבן על המצח.

נהוג לחשוב שחתול וכלב לא מסתדרים ביניהם, רבים ולא סובלים אחד את השני, אבל נציין שאוגוסטה ותומאס חיו יחד בשלום ובשלווה.

אוגוסטה הייתה כלבה רגועה ומאוזנת נפשית, ואפילו כשתומאס קפץ על גבה לא הפילה אותו אלא רצה בשקט כמה מעגלים עד שהוא בעצמו היה יורד ממנה.

הזוג גרוס היו בעלי הכנסה בינונית, אבל אן גרוס קיבלה ירושה ענקית מאביה שהיה אחד מהבעלים הראשונים של מאגרי נפט בצפון אמריקה. לכן היא הצליחה לרכוש בית מכובד בישראל ובכך להגשים את חלומה הישן לעבור מקנדה שבה הם נולדו, הקימו משפחה וחיו בשלום, לישראל.

הקורא מבין שבמקרה הנתון ההחלטה הזו התקבלה ממניעים אידאולוגיים ולא ממניעים חומריים.

בני הזוג גרוס קנו בית במי נס ועברו להתגורר בו באביב 2008. באותה התקופה בתם אליס הייתה בת חמש. בעוד שנתיים, באביב 2010, אליס זכתה לאח: אצל בני הזוג נולד בן. וייקרא שמו של התינוק בישראל משה לכבוד הנביא הגדול של עם ישראל. באנגלית מבטאים את השם הזה בתור "מוזס", ובשם חיבה – מוסי. ביום שבו מלאו למוסי שלוש שנים, קרה לו מאורע לא שגרתי שפתח בפניו דלת לעולם שהיה לא מוכר ובלתי-נראה בשבילו עד אז.

יצורים החיים בעולם הזה הם לא בני אדם, אבל בהרבה מובנים דומים להם. הם יכולים לעשות כל מיני פעולות ולקיים מערכות יחסים שונות אחד עם השני.

הם מגוונים, נבדלים אחד מהשני בגודל ובאופי, אך בו בזמן כולם מאוחדים על ידי תכונה משותפת אחת: הם נועדו לתיאור היחסים הכמותיים בעולם של בני אדם.

היצורים האלה נקראים מספרים.

בסיפור שלנו אנחנו נפתח לכם, הקוראים הקטנים והיקרים שלנו, דלת לעולם הזה – עולם המספרים.

אז בשעה טובה, דרך צלחה!

1. היקיצה

באחד מן הימים בחודש מרץ, כשהשמש עלתה קצת מעל האופק וקרניה הראשונות רק נגעו בגגות השטוחים של המושב מי נס, התעורר מוסי גרוס במיטתו עם מעקה בטיחות גבוה בחדרו שבקומה השנייה בבית משפחת גרוס. הייתה זו לא קרן שמש שהעירה אותו. התריסים היו סגורים וקרן שמש עדינה של זריחה לא הייתה מסוגלת לעבור דרכם.

מוסי התעורר מקרן אור שנגעה בעיניו ושמקורה היה ליד מיטתו. מוסי התעורר בתחושת שמחה שלא סרה ממנו מאמש אפילו בשינה. אתמול בערב אימו השכיבה אותו לישון, נישקה לו ואמרה שמחר, בעצם כבר היום, יש למוסי יום הולדת ולכן יגיעו הרבה אורחים, והוא יקבל הרבה איחולי מזל טוב ומתנות. מוסי החליט שאולי יש ליד המיטה איזושהי מתנה קורנת אור, הוא התרומם, קם במיטתו כשהוא מחזיק במעקה, והתבונן במקום שממנו יצא האור. הוא ראה שם ילדה שהייתה דומה מאוד לאחותו אליס, או אליסה, כפי שנקראה בידי דודתו לאורה המתגוררת בגרמניה והמגיעה לעיתים לבקר את משפחתו של אחיה פיליפ.

– אליסה? – שאל מוסי.

– לא, אני לא אליסה, – אמרה הילדה – רק ניסיתי להידמות לה כדי שלא תיבהל כשתראה אותי.

– אז מי את?

– קוראים לי טאורה, בקיצור – טאו.

– לאורה? – שאל מוסי בהיזכרו את הדודה לאורה.

– לא לאורה אלא טאורה או טאו, אבל אתה יודע מה? יהיה לך קל ונוח יותר לקרוא לי "הפיה טאיה".

– הפיה??

– כן, הפיה, כי אני קוסמת שיודעת לחולל כל מיני ניסים, ומטה הקסמים שלי זו הקרן הזו.

היא הרימה את ידה הימנית ומהציפורן של אצבעה המורה יצאה אותה הקרן שהעירה את מוסי.

אז אמרה הפיה טאיה:

– כדי שתאמין בכוחות הקסמים שלי, אראה לך את אחד הפלאים, לא את הפלא הכי גדול.

אז קרן האור נגעה בשערותיו של מוסי, והוא פתאום הרגיש שהוא מתחיל לגדול בלי מעצורים.

לפני כן הוא הביט בילדה דרך שלבי מעקה הבטיחות של מיטתו, וכעת הוא כבר היה מעל המעקה הזה.

רגליו נשארו בתוך המיטה, וראשו עלה גבוה יותר ויותר עד שהתקרב לתקרה. אז קרן הקסמים שוב נגעה בשערותיו, ומוסי נחת ברכות לתוך מיטתו כשהוא שוב הופך למוסי הקטן. הכל קרה כל כך מהר שמוסי רק הספיק להגיד: "אווי!". אז המעקה של מיטתו ירד, ומוסי מצא את עצמו יושב על קצה המיטה. רגליו נגעו ברצפה ועיניו הביטו ישר בילדה.

– הנה, עכשיו אין לך ספקות שאני פיה? כך גם תקרא לי: "הפיה טאיה".

– הפיה טאיה, איך הגעת לחדר שלי? – שאל מוסי.

– אני נמצאת בו כל הזמן כבר שלוש שנים מאז שנולדת, או יותר נכון, מהיום שבו עברת ברית מילה.

הסנדק שלך משה קליין הביא אותי לכאן והורה לי להישאר איתך ולשמור עליך במשך שלוש שנים, עד יום ההולדת השלישי שלך, אז היום אני עוזבת, ולכן החלטתי להראות את עצמי בפניך.

– אבל למה אף פעם לא ראיתי אותך לפני?

– לא יכולת לראות אותי, כי הייתי בגודל הטבעי שלי, אפשר להגיד, בגודל שהיה לי מלכתחילה. והגודל הזה הוא כזה שאף עין אנושית לא מסוגלת לראות אותי אפילו באמצעות מיקרוסקופ הכי חזק. העניין הוא, מוסי יקירי, בכך שאני מספר, ולא סתם מספר אלא מספר לא שגרת, מספר קטן יותר ממה שהעין האנושית מסוגלת לראות.

המתמטיקאי משה קליין גילה אותי באופן תיאורטי במחקרו והחליט להעניק לך אותי במתנה לתקופה מסוימת בברית המילה שלך. כעת התקופה הזו תמה ואני עוזבת אותך.

2. מאיפה את, הפיה טאיה?

כאן נביא את סיפורה של הפיה טאיה על מולדתה. נציין שכל התקשורת בין הפיה טאיה לבין מוסי מתנהלת בשפה האנגלית. בשנות השהייה הסודית במשפחת גרוס נודע לפיה טאיה ששפת האם של המשפחה הזו היא אנגלית. למרות שבני הזוג גרוס ואפילו אליס כבר שלטו היטב בעברית, הם העדיפו לתקשר ביניהם באנגלית.

ובשביל מוסי זו שפת התקשורת היחידה בינתיים.

רק עכשיו, אחרי שמלאו לו שלוש שנים, הוא יתחיל ללכת לגן ילדים ביישוב וכיכר את השפה העברית, וגם יתחיל לדבר בה.

הנה מוסי יושב על קצה מיטתו עם המעקה שהורד למטה ומקשיב לסיפורה של הפיה טאיה.

– ייתכן שאתה עדיין לא יודע, מוסי יקירי, שכל המרחב שבו נמצאות כל הבריות, היקום כפי שנהוג לקורא לו, מתחלק לחלקות עצומות נפרדות בדומה לכך שבית מתחלק לדירות ודירות מתחלקות לחדרים. החלקות האדירות האלה נקראות גלקסיות. כוכב הלכת שלכם, כדור הארץ, נמצא באחת מהן. ואני נולדתי בגלקסיה אחרת, רחוקה מאוד מכם, אבל הקרובה ביותר לזה שיצר את כל הבריות. הגלקסיה שלי מאוכלסת לא ביצורים הדומים לאנשים אלא בכל מיני מספרים, גדולים וקטנים, מכל הסוגים שקיימים ביקום. הגלקסיה הזו נקראת נומרמטיקה.

היא מתמלאת בקביעות בסוגים חדשים של מספרים אשר מתפשטים ממנה ברחבי כל היקום. המספרים נולדים במוחו העצום של יצור בשם גלאפר.

הוא קיבל את כל סמכויותיו מההוא שיצר הכל ומנהל את הכל. מדע חשוב בשם מתמטיקה שולט בחיי המספרים, כשהחוקים המנהלים את חייהם והמשפיעים על כל הבריאות יוצרים תורת יסוד בשם נומרולוגיה. חיבורם של שני השמות – "נומרולוגיה" ו"מתמטיקה" – נתן שם לגלקסיה שלי – נומרמטיקה. נולדתי בנומרמטיקה יחסית לא מזמן, כאשר גלאפר החליט ליצור סוג חדש של מספרים שהיו כל כך קטנים שאף יצור ביקום לא יכול היה לראות אותם. אפשר רק להרהר בי, כלומר, להבין אותי באמצעות שכל. יחד עם זאת, אני גדולה יותר מהמספר הזה שכולם מכירים וכותבים בתור מעגל שבתוכו ריק. משמעות המספר הזה – אפס מוחלט, כלום ושום דבר. האומללות הזו של אפס וחולשתו באות לידי ביטוי כשהוא רוצה להתאחד עם איזשהו מספר אחר. אפס נצמד ל"לא אפס", מחבק אותו בכל הכוח... ולא מסוגל לעשות כלום.

המספר השני בכלל לא משתנה בעקבות החיבוקים של האפס. על רקע זה, מוזר להרגיש את עוצמתו האדירה של האפס המתבטאת כאשר הוא רוצה לגבור על המספר השני, להכפיל את המספר השני בעצמו, באפס. אז הוא פשוט בולע את המספר השני והופך אותו לאפס מוחלט, לריק. כאשר גלאפר יצר אותי, הוא החליט לחתן אותי עם אפס מוחלט ואסר עליו בתכלית האיסור להיאבק בי ולהכפיל אותי בעצמו. היה מותר לו רק לחבק אותי בניסיון להתאחד איתי. במהלך האיחוד הזה אפס נעלם ואני נשארתי בריאה ושלמה.

כתוצאה מן האיחוד הזה נולדו לנו אין ספור ילדים שהיה להם דמיון מסוים לאביו ודמיון מסוים לי. קראנו להם אפסים "רכים". כמוני, הם היו בלתי נראים בעין רגילה. כשאפס "רד" היה נאבק במספר רגיל, להבדיל מאביו, הוא לא היה בולע את המספר כולו, כלומר, לא היה הופך אותו לאפס "רד" אלא היה רק מגדיל בזכותו את מימדיו. אך אם שני אפסים "רכים" היו מתחילים להילחם אחד בשני, כלומר לעשות מכפלה ביניהם, שניהם היו נעלמים והופכים לאביהם. זאת אומרת, במקום שני אפסים "רכים" היה מופיע אפס מוחלט אחד.

לא אני ולא בן זוגי – האפס המוחלט – לא רצינו שהילדים שלנו ייעלמו, לכן בנינו לכל אחד מהם ביתן נפרד, והביתנים האלה מלאו רחוב באורך אינסופי, ובמרכז הרחוב הזה נמצא בית גדול שבו מתגוררים אנחנו – בעלי האפס המוחלט ואני, מספר לא שגרתי טאו, מספר שהוא טיפה יותר גדול מאפס (זה קצת מעליב את בן זוגי), אבל קטן יותר מכל מספר אחר (זה קצת מנחם אותי). הרי למרות שהוא בעצם כלום, הוא בכל זאת נראה בידי הצופים מהצד.

הרחוב הזה בגלקסיה נומרמטיקה שבו נמצא הבית שלנו ומשני צדדיו – ביתנים של ילדינו – נקרא "רחוב האפס". מפעם לפעם אנחנו יוצאים מביתנו למרחב שסובב אותו כדי לתקשר עם מספרים אחרים. המספרים מתרחקים מבעלי בגלל הפחד שהוא יכפיל אותם בעצמו, ואותי פשוט לא רואים, כמו שלא רואים גם את ילדינו, האפסים ה"רכים" שגם מטיילים מחוץ לביתנים שלהם. אבל אני רואה אותם היטב ובאחריותי לא לתת להם להיתקל אחד בשני, כי, כמו שאמרתי קודם, זה עלול להביא להיעלמותם. כך התנהלו חיינו במשך תקופה די ארוכה אחרי נישואינו ואחרי הולדת ילדינו. ואז קרה הדבר הבא. מדי פעם גלאפר שולח את המספרים החדשים שהוא יוצר לסוג של שליחות למקומות אחרים ביקום, כדי שהמספרים האלה יתגלו, יתרבו וייכנסו לשימוש. כשמספר מקורי

שנולד בנומרמטיקה מסיים את משימתו, הוא רשאי לחזור למולדתו. השליחות שלי הייתה בכדור הארץ, בגלקסיה רחוקה מאוד מנומרמטיקה.

כשילדי גדלו והתחילו לצאת מהביתנים שלהם החוצה, הם נפגשו עם מספרים אחרים, כאלה שכבר התפשטו בכל היקום ולכן נקראים מספרים ממשיים.

כפי שאתה זוכר, נאסר על אפסים "רכים" להיאבק אחד בשני. הקפדתי על שמירת הכלל הזה. עם זאת, היה מותר להם לבוא במגע עם מספרים אחרים – להתאחד איתם ואפילו להיאבק בהם. מהקשרים האלה נוצר סוג חדש של מספרים המאחדים בתוכם תכונות של מספרים ממשיים ואפסים "רכים". מהר מאוד מלאו המספרים האלה את כל הגלקסיה נומרמטיקה, ואז גלאפר נתן לה שם אחר – "אפרכסיה". אני חייבת להגיד לך ששפת הגלקסיה שלנו לא אנגלית, לא רוסית, לא ספרדית ולא כל שפה אחרת הנפוצה בעולם שלכם. השפה שלנו היא עברית, כי זוהי שפת הבריאה. מילות השם שלפיהן נברא היקום נאמרו בעברית. וחלק מהמספרים, אלה שנקראים מספרים טבעיים, אפילו קדמו לבריאה. בעזרתם סומנו ימי הבריאה. המילה "אפרכסיה" נוצרה מאיחוד של שתי מילים בעברית: "אפס" ו"רד".

כיוון שדווקא האפסים "הרכים" יצרו מספרים חדשים שנקראו "מספרים רכים", כל הגלקסיות שלנו שהתמלאו בהם קיבלו שם "גלקסיות של אפסים רכים" או "אפרכסיה".

כשאפרכסיה התעצבה סופית, החליט גלאפר שצריך להכיר לתושבי גלקסיות אחרות את המספרים הרכים. למטרה זו הוא שלח נציגים של הסוג הזה של המספרים כדי שיספרו ליצורים בעלי תבונה מגלקסיות אחרות על המספרים האלה. נשלחתי על ידי גלאפר ליצורים בעלי תבונה המתגוררים בכדור הארץ. פה הייתי זמן מה במצבי הרגיל והבלתי נראה לעין. אולם, כעבור תקופה מסוימת הצליח אחד המתמטיקאים המקומיים בשם משה קליין לגלות אותי באופן תיאורטי ולבוא במגע איתי.

סיפרתי לו על אפסים "רכים" ועל מספרים רכים ולאחר מכן הוא שיתף את הידע הזה בעבודת הדוקטורט שלו ובכתבי עת מדעיים. בכך קיבלו תושבי כדור הארץ הזדמנות לגלות על תושבי אפרכסיה. משימתי הושלמה ויכולתי לחזור הביתה. ממש רציתי בזה, הרי התגעגעתי מאוד לבעלי ולילדיי. אך משה שכנע אותי להישאר בבית משפחת גרוס לשלוש שנים נוספות כדי לשמור עליך ואחרי זה ללמד אותך שיעור ראשון במתמטיקה. הייתי אסירת תודה למשה על כך שמרגע פגישתו איתי הקדיש את חייו להפצת ידע עליי, על ילדי ועל כל המספרים הרכים.

לכן הסכמתי להישאר בבית משפחת גרוס לעוד שלוש שנים. אף אחד מבני המשפחה לא היה מסוגל לראות אותי, הרי הייתי בגודל הרגיל שלי, הבלתי נראה לעין אנושית. אבל הייתי איתך תמיד וראיתי הכל.

כשישבת בגינה שליד הבית ועפה לעברך צרעה שרצתה לעקוץ אותך, הברחתי אותה בעזרת קרן הקסם שלי. קרה גם מקרה חמור הרבה יותר: מחולות המדבר הגיע נחש שנכרך סביב רגלך. נאלצתי להרוג אותו באמצעות אותה הקרן.

היו עוד מקרים רבים שבהם נשקפה סכנה לחייך, והצלחתי למנוע את ההשלכות החמורות.

היום, ביום הולדתך השלישי, אני נפרדת ממך. אך לפני כן עליי לקיים עוד הבטחה אחת שנתתי למשה – ללמד אותך שיעור ראשון במתמטיקה. לצורך כך נצטרך שולחן קטן וערמה של אבנים בשני צבעים – תכלת וצהוב.

בסיום דבריה הרימה הפיה טאיה את אצבעה המורה ומהציפורן שלה יצאה קרן אשר שירטטה מעגל באוויר. בתוך המעגל הופיע שולחן אופקי שהיה כאילו תלוי באוויר ובאחת מפינותיו הייתה מונחת ערמה של אבנים בצבעי תכלת וצהוב.

מוסי הכיר את הצבעים האלה היטב: תכלת זהו הצבע של השמיים מעל היישוב מי נס, והצהוב הוא צבע החולות הסובבים את היישוב. ובכן, כעת הכל מוכן ואפשר להתחיל בשיעור.

3. השיעור

השיעור שהעבירה הפיה התנהל בצורת דו-שיח: הפיה טאיה הסבירה דברים ושאלה שאלות, ומוסי ענה וביצע את המשימות שנתנה לו, ולעיתים גם שאל אותה שאלות. אנחנו מביאים את הדו-שיח הזה כפי שהוא התנהל – לפני מילותיה של הפיה טאיה יהיה כתוב הפיה טאיה, ולפני מילותיו של מוסי יהיה כתוב מוסי. בתוך הדו-שיח הזה מופיעות לעיתים כותרות של הנושאים הנידונים. הכותרת להלן מסמנת את הנושא הנידון הראשון.

מה זה מספר טבעי

הפיה טאיה – כעת אכיר לך את עולם המספרים. מספרים נמצאים בכל קצוות התבל. לעיתים הם בלתי נראים ולעיתים קשה לאתר אותם. יש הרבה סוגים של מספרים, אבל המספר החשוב ביותר שממנו נוצרו כל המספרים האחרים זהו מספר "אחת". כותבים אותו באופנים שונים, במקומות שונים ובזמנים שונים, אבל המשמעות היא אותה המשמעות. אנחנו אומרים "אחת", כשרואים חפץ אחד המופיע בודד ולבד, ללא ליווי של חפצים אחרים הדומים לו.

הנה, הבט וספר מה אתה רואה.

מוסי – הרמת את ידך ולפניי הופיעה קובייה אחת קטנה, היא פשוט דאה באוויר ולא נשענת על דבר. והנה מצטרפת אליה עוד קובייה.

הפיה טאיה – כעת הן שתיים. זה מספר "שתיים". הינה אני מצרפת אליהן קובייה נוספת, נקבל מספר "שלוש". אני מצרפת עוד אחת, והינה "ארבע", עוד אחת – "חמש". תגיד, מה אתה רואה?

מוסי – אני רואה חמש קוביות זהות שדואות באוויר בלי שהיו קשורות למשהו או מונחות על משהו.

הפיה טאיה – כך אפשר להמשיך ולקבל מספרים חדשים. אנחנו רואים שכל המספרים האלה מתקבלים באמצעות הוספת מספר "אחת" למספר שהתקבל קודם. לכן אמרתי שהמספר "אחת" זהו המספר החשוב ביותר. יתרה מכך, המספר "אחת" היה קיים עוד לפני בריאת העולם, הרי אז לא היה כלום ולא היה אף אחד חוץ מן הבורא. הוא היה אחד ובעת הבריאה נוצרו כל המספרים האחרים שמתקבלים בעזרת המספר "אחת", כמו שהראיתי לך. יש אינסוף מספרים כאלה והם נקראים מספרים טבעיים. בעזרת המספרים האלה גילה האדם, נזר הבריאה, הרבה מספרים אחרים. לא נדבר עליהם היום. למעשה, אתה כבר יודע חמישה מספרים טבעיים ראשונים. כמה מהם חיים על הגוף שלך. אני רואה שאתה מופתע, אל תהיה. תיכף תראה בעצמך שזה ככה.

מספרים בגוף האדם

נתחיל מהמספר החשוב ביותר – "אחת". יש לך ראש אחד. הינה הקרן שלי נוגעת בו ומלטפת את שיערך. הראש הוא האיבר החשוב ביותר בגוף שלך. הודות לו אתה חושב ומבין אנשים אחרים. יש לך מצח אחד, אף אחד, פה אחד ויש לך איבר אחד שאימא שלך קוראת לו "פיפיון", ואתה משתמש בו רק למטרה אחת. אבל בעתיד הוא יבטיח את המשך השושלת שלך.

כעת נעבור למספר "שתיים". הוא גם חי בגוף שלך. יש לך שתי עיניים, שתי אוזניים, שתי גבות, שני נחיריים וגם שתי שפתיים. וכל זה בפנים שלך. עכשיו נרד למטה יותר. יש לך שתי ידיים, הינה הן עולות למעלה. וגם שתי רגליים, הינה הן מפוסקות.

עוד מספר חשוב בגוף שלך הוא המספר "חמש". בכל יד יש לך חמש אצבעות ובכל רגל – חמש בהונות. תרים את היד הימנית.

תיכף נספור את האצבעות שלך. רק תחזיק את היד שלך למעלה, תביט באצבעות ותעקוב אחריהן: אחרי שאני קוראת לאצבע בשמה היא מתכופפת.

אחת – אגודל, שתיים – אצבע מורה, שלוש – אמה, ארבע – קמיצה, חמש – זרת.

כעת כל האצבעות שלך באגרוף. פתח את האגרוף ותצמיד את כף היד הימנית לכף היד השמאלית, כל אצבע אל חברתה – זרת לזרת, קמיצה לקמיצה, אמה לאמה, אצבע מורה לאצבע מורה ואגודל לאגודל. תרים את הכפיים המחוברות למעלה.

עכשיו רואים שביד שמאל יש אותו מספר של אצבעות כמו ביד ימין, בדיוק חמש. חמש ועוד חמש יחד נותנים מספר עשר. בשתי הידיים יש בדיוק עשר אצבעות. המספר "עשר" זה המספר השני בחשיבותו אחרי המספר "אחת" מתוך המספרים החיים בגוף האדם. כיוון שהמספר הזה חי בידיים, והידיים הן האיבר הפעיל ביותר בגוף האדם, כבר בעת העתיקה השתמשו אנשים במספר "עשר" כדי לקבוע גדלים של מספרים אחרים. במילים אחרות, הם ספרו בעשרות. שיטת חשבון זו בצורתה המשוכללת יותר נמצאת בשימוש גם בימינו.

מספר אחד לקבוצות חפצים שונות ופירוק של מספר אחד לשני מספרים

כעקרון, מוסי, כל מספר טבעי חוץ מהמספר "אחת", קשור לקבוצה של חפצים. אותו מספר גם יכול לתאר קבוצות של חפצים שונים לחלוטין.

תראה, מוסי, לפניך קבוצה של קוביות שכבר ראית, ומתחתיה קבוצה של כדורים שמתחתיה גם קבוצה של פרחים. אתה רואה אותן, מוסי?

מוסי – כן, אני רואה אותן תלויות באוויר, אחת תחת שנייה.

הפיה טאיה – לפניך קבוצות של חפצים שונים, הרי קובייה היא לא כדור וכדור הוא לא פרח. אבל לשלוש הקבוצות השונות האלה יש תכונה אחת משותפת – כמות החפצים בהן המתוארת על ידי המספר "ארבע". כדי להציג את המספרים נשתמש בקבוצות של אבנים בצבעים שונים. תביט ותגיד מה אתה רואה עכשיו?

מוסי – פתאום הופיע לפניי לוח הדומה בצורתו ללוח שחמט, אבל בלי משבצות. על הלוח מונחת ערמה של אבנים בשני צבעים – תכלת וצהוב.

הפיה טאיה – לקבוצה הזאת של אבנים מתאים מספר מסוים. לא נגדיר אותו עכשיו, אבל נפרק אותו לשני מספרים אחרים, ואתה תביט ותספר מה אתה רואה.

מוסי – הקרן שלך נגעה בערמת אבנים, והאבנים התכולות נעמדו בשורה אחת כשהאבנים הצהובות הסתדרו בשורה אחרת.

הפיה טאיה – לקבוצה של אבנים צהובות מתאים מספר מסוים, ואילו לקבוצה של אבנים תכולות מתאים מספר אחר. יחד, סכום המספרים האלה הוא המספר שהתאים לקבוצה של אבנים בשני הצבעים. כרגע עשינו פירוק של מספר אחד לשני מספרים. בעזרת האבנים נלמד לבצע פעולות מסוימות עם מספרים. אבל קודם נחזור למספרים החיים בגוף שלך. נסתכל על המספר שחי בראש שלך. הנה הקרן שלי מבלגנת את השערות שלך, והן מסתמרות. אבל עכשיו הקרן מסרקה את השערות, והן שוב מסודרות על הראש כאילו בדיוק הסתרקת.

על מספרים גדולים ועל המספר הגדול ביותר – האם הוא קיים?

מספר השערות שלך עצום, אפשר לספור אותו ולמספר הזה יש שם. לא נעשה את זה עכשיו, אבל זה מספר גדול מאוד. דע, מוסי יקירי, אין סוף למספרים. לא קיים בעולם המספר הגדול ביותר. לא משנה כמה גדול המספר שתגיד, יהיה מספר גדול ממנו. בוא נדבר עכשיו על המספרים שסובבים אותנו. בהתחלה נלמד לקבוע גודל של מספרים לא גדולים תוך שימוש בספירה בעשרות.

איך סופרים בעשרות

לפניך קבוצה של אבנים המסודרות בשורה אחת. קח מתחילת השורה חמש אבנים. אחר כך שוב חמש, כלומר, עשר אבנים סך הכל. אחרי העשירייה הזו תעשה רווח קטן וממה שנותר מקבוצת האבנים קח שוב עשירייה וכן הלאה. פעל לפי ההוראות האלה וספר לי מה אתה עושה.

מוסי – אני עושה כדבריך, סופר ומפריד חמש אבנים, אחר-כך עוד חמש, סך הכל עשר. נשארו עוד הרבה אבנים. מהן אני סופר ומפריד חמש ועוד חמש. שוב עשר. מהאבנים הנותרות שוב חמש וחמש. עכשיו נשארו רק שתי אבנים...

הפיה טאיה – כל הכבוד, מוסי, עשית הכל נכון. כעת אנחנו יודעים מה מספר האבנים, אלה שלוש עשיריות ועוד שתי אבנים. אתה יודע מה? תפתח את הפה! אציץ בו. עוד לא צמחו לך כל השיניים. אבל כשכל השיניים יצמחו, המספר שלהן יהיה שווה בדיוק למספר האבנים כאן: שלוש עשיריות ושתיים, או בקיצור, שלושים ושתיים. אז יהיה לך בגוף מספר "שלושים ושתיים".

מה אפשר לעשות עם מספרים בלי לדעת את גודלם

עכשיו נדבר על מספרים מספיק גדולים שאנחנו רוצים או לא רוצים לספור. מה אפשר לעשות איתם בלי לדעת מה הגודל שלהם ובלי לספור אותם לפי עשרות, כשאנחנו יודעים רק דבר אחד – אלה מספרים מסוימים?

הנה, תראה, לפניך על השולחן ערמה חדשה של אבנים. עכשיו הן לא בצבעי תכלת וצהוב אלא בצבע סגול. ערמה של אבנים סגולות. אני בעצמי לא יודעת כמה יש כאן. אבל תיכף נגלה הרבה על המספר שלהן מבלי לדעת את גודלו או את שמו. לצורך כך, אנחנו צריכים לסדר את האבנים בשורה אחת. עכשיו אעשה את זה בעזרת הקרן שלי. הנה היא נגעה באבנים הסגולות, והנה הן כבר הסתדרו בשורה אחת, אבן אחרי אבן.

כעת, מוסי, אתה רואה שורה של אבנים המייצגת מספר מסוים. עכשיו נלמד תכונות של המספר הזה מבלי לדעת את גודלו ואת שמו.

אגב, שמות של אותו המספר שונים בשפות שונות, אבל מהות המספר זהה תמיד ולא תלויה בשפה או במקום שבו המספר נמצא. כדי לברר את תכונותיו של מספר האבנים הסגולות, בוא ננסה לחלק את הקבוצה הזאת לחלקים שווים. בהתחלה נחלק לחלקים המכילים אבן אחת. תסדר את השורה הזו כך שיהיה רווח בין אבן לאבן. הבנת הכל?

מוסי – כן, אני כבר עושה את זה בזריזות רבה, כמו שאני עושה תמיד כשאני מבין מה רוצים ממני. **הפיה טאיה** – כן, מוסי, עשית מהר ונכון. כעת כל קבוצה האבנים מחולקת לחלקים שווים המכילים אבן אחת. זה אומר שמספר האבנים מתחלק במספר "אחת".

ועכשיו, מוסי, תראה: האבנים שוב באורח פלא הסתדרו בשורה אחת ללא רווחים. בוא ננסה לחלק את המספר הזה בשתיים. לצורך כך קח שתי אבנים ותשאיר אחריהן רווח, אחר – כך עוד שתיים – ושוב רווח וכן הלאה. כך נחלק את מספר האבנים בשתיים, ונראה מה ייצא לנו. כל הכבוד, מוסי, אני רואה שאתה עושה הכל בדיוק כמו שאמרתי, ומהר מאוד, אתה ילד נבון. וכעת ספר לי מה עשית ומה יצא לך.

מוסי – בהתחלה הפרדתי שתי אבנים, עשיתי רווח, אחר – כך שוב שתי אבנים, שוב רווח, אחר – כך עוד שתיים, וכך עוד הרבה פעמים עד שנשארה רק אבן אחת שאין לה בת – זוג.

הפיה טאיה – אתה רואה, מוסי, נשארה אבן אחת בשארית החלוקה. במקרה הזה המספר שמחלקים נקרא מספר אי – זוגי. עכשיו אנחנו יודעים שהמספר המתאים לקבוצת האבנים שלנו הוא מספר אי – זוגי.

מספרים זוגיים ואי – זוגיים

מוסי – ואם לא היינו מקבלים שארית החלוקה הזו, וכל האבנים היו בזוגות, אז המספר היה מתחלק בשתיים?

הפיה טאיה – כל הכבוד, מוסי, חשוב מאוד לדעת לשאול שאלות נכונות! אני אענה על השאלה שלך. מספר שמתחלק בשתיים ללא שארית חלוקה נקרא מספר זוגי. כל מספר הוא זוגי או אי – זוגי. הסתבר שמספר האבנים הסגולות הוא אי – זוגי, אבל במקרים אחרים יכול להיות מספר זוגי של אבנים. מה דעתך, מוסי, אם יש לי ביד אבן אחת...

הנה, תראה, יש לי אבן אחת בכף ידי. אבל היא לא סגולה, היא כתומה. אם יש לי ביד מספר "אחת", מה דעתך, הוא זוגי או אי – זוגי?

מוסי – לא יודע, כאן אי- אפשר להרכיב זוג...

הפיה טאיה – כן, נכון. זה אומר שאין כאן זוגות בכלל, אלא ישר יש שארית חלוקה. כלומר, "אחת" זה מספר אי- זוגי. ומה אתה חושב, איזה מספר זה "שלוש"?

מוסי – שלוש אבנים... אפשר להרכיב מהן רק זוג אחד ואז תישאר אבן אחת. אי- אפשר להרכיב זוג מאבן אחת – זו שארית חלוקה. כלומר, המספר שלוש הוא אי- זוגי.

הפיה טאיה – יישר כוח, מוסי! הבנת את המושג הזה. ובכן, אתה זוכר שכל מספר טבעי הוא זוגי או אי- זוגי. עכשיו נדבר על תכונות מסוימות של מספרים שאפשר לקבוע אותן מבלי לדעת את גודל המספרים.

מספרים ראשוניים ופריקים

נחזור לאבנים שלנו. אנחנו יודעים שמספרן אי- זוגי, כלומר, הוא לא מתחלק בשתיים. ועכשיו בוא ננסה לחלק את המספר הזה בשלוש. תרכיב קבוצות של שלוש אבנים, ואחרי כל קבוצה תשאיר רווח.

מוסי – הבנתי מה צריך לעשות: אני סופר שלוש אבנים, ואז רווח, אחר- כך עוד שלוש אבנים, רווח ועוד שלוש... מתקבלות הרבה קבוצות בנות שלוש אבנים. והנה לבסוף השארית – אבן אחת. אז המספר הזה מתחלק בשלוש? לא, לא מתחלק. לא מתחלק כי התקבלה שארית מסוימת. כשהתחלתי לחלק אותו לקבוצות של שלוש אבנים, נשארה שארית חלוקה, לכן המספר לא מתחלק בשלוש.

הפיה טאיה – אתה רואה, הוא לא מתחלק! וכעת ננסה לחלק אותו בחמש, כלומר, ננסה לחלק את כל הקבוצה של האבנים לחלקים של חמש.

מוסי – אני סופר חמש אבנים, ואז רווח, אחר- כך עוד חמש אבנים, רווח ועוד חמש, אני ממשיך עד שייגמרו האבנים... והנה הסוף – נשארו רק שלוש אבנים.

הפיה טאיה – אתה רואה, הוא לא מתחלק גם בחמש. בוא ננסה לחלק אותו בשבע. אולי אתה עדיין לא יודע מה זה שבע? אז אגיד לך. חמש ואחת זה שש, וחמש ושתיים זה שבע. אז תרכיב קבוצות של שבע אבנים עם רווח ביניהן ולך עד הסוף...

אני רואה שכבר התחלת לעשות את זה, לך עד הסוף ותגיד לי מה יצא בסוף.

מוסי – סיימתי וקיבלתי אבן אחת בשארית.

הפיה טאיה – כלומר, המספר לא מתחלק גם בשבע. וכעת, מוסי יקירי, בוא ננסה לחלק אותו בתשע. מה זה תשע? אתה עוד לא יודע מה זה תשע? אם מתחילים משבע: שבע ואחת זה שמונה, ושמונה ואחת זה תשע. הנה אני סופרת ומפרידה תשע אבנים ועושה רווח אחריהן, ואתה תמשיך.

מוסי – אני סופר ומפריד תשע אבנים, אחר- כך רווח, ואז עוד תשע אבנים, רווח, עוד תשע ורווח, אבל הלאה אי- אפשר, חסרות שתי אבנים.

הפיה טאיה – אתה רואה, הוא לא מתחלק גם בתשע. וכמה אבנים בשארית? תספור.

מוסי – אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש, שש, שבע אבנים – בשארית שבע אבנים.

הפיה טאיה – אם אפילו נמשיך בעבודה, אתה תראה שהמספר שלנו לא מתחלק לחלקים, חוץ מהחלקים שכל אחד מהם מייצג את המספר "אחת". דע, מוסי, שאם שאי-אפשר לחלק לחלקים ללא שארית חוץ מחלקים של "אחת" ולמספר עצמו, אז המספר שמוצג על ידי קבוצה כזו נקרא מספר ראשוני. כלומר, מספר האבנים בקבוצה שלנו הוא מספר ראשוני.

אנשים פרה-היסטוריים גילו את המספרים האלה. תאר לעצמך אדם קדמון שאסף צדפות ואבנים בחוף ושיחק בהן. במיוחד אם האדם הקדמון הזה היה עוד צעיר – ילד או נער. איך הוא שיחק באבנים? הוא ניסה לחלק אותן לחלקים שווים.

לפעמים הוא הצליח בזה ולפעמים לא. וכך מספרים ראשוניים התגלו עוד בעידן הקדום. מספרים ראשוניים הם מספרים חשובים מאוד. למה? כי מהם אנחנו יכולים לבנות את כל המספרים הטבעיים כמו שאפשר לבנות בית מלבנים. איך בדיוק? תגלה את זה בעתיד. כרגע פשוט גילית מה זה מספר ראשוני.

כל המספרים המייצגים מספר חפצים בקבוצה מתחלקים לזוגיים ואי-זוגיים. מספרים לא ראשוניים נקראים פריקים. וכעת תגיד, מוסי, מספר זוגי הוא מספר ראשוני או פריק?

מוסי – זוגי, זוגי... כן, זה כשאנחנו מרכיבים מספר מזוגות. זה אומר שאפשר לחלק אותו בשתיים. כלומר, מספר זוגי הוא לא מספר ראשוני אלא מספר פריק.

הפיה טאיה – אבל מה עושים עם מספר "שתיים"? קבוצה משתי אבנים – לאילו חלקים שווים בני פחות משתי אבנים אפשר לחלק אותה?

מוסי – הרי זה כל כך פשוט: לשני חלקים, בכל אחת אבן אחת.

הפיה טאיה – כלומר, מספר שקטן ממספר שתיים וישבו מספר שתיים מתחלק ללא שארית הוא רק מספר אחת. אז המספר שתיים הוא ראשוני או פריק?

מוסי – יוצא שהוא ראשוני...

הפיה טאיה – מעולה, מוסי, אתה צודק. המספר שתיים זה מספר ראשוני. זה מספר זוגי ובאותו העת הוא ראשוני. כל המספרים הזוגיים האחרים הם מספרים פריקים.

מספר זוגי "שתיים" הוא מספר ראשוני.

מה אתה חושב, מוסי, יש עוד מספרים זוגיים ראשוניים למעט מספר "שתיים"?

מוסי – נדמה לי שכל שאר המספרים הראשוניים הם אי-זוגיים.

הפיה טאיה: כן, כל מספר ראשוני למעט מספר "שתיים" הוא בהכרח אי-זוגי. אבל יש גם מספרים אי-זוגיים שהם לא ראשוניים. תיכף נראה את זה. הנה, מוסי, לפניך הופיע משהו חדש. תגיד לי, מה בדיוק הופיע ואיך?

מוסי – ראיתי קרן הקסם מפציעה, נוגעת בלוח ועליו מופיעה שורה של אבנים אדומות.

הפיה טאיה: מוסי, בוא ננסה לספור אותן בעשרות. כבר עשית את זה בעבר. תחזור על זה וספר לי מה אתה עושה.

מוסי – אני סופר ומפריד חמש ועוד חמש, זה יהיה עשר. רווח. חמש ועוד חמש זה שוב עשר. עוד פעם חמש ועוד חמש זה עשר, רווח וזהו, כי נשארו רק שלוש אבנים. אי-אפשר להרכיב מהן קבוצה של עשר אבנים. בסוף יצאו סך הכל שלוש עשיריות ושלוש אבנים.

הפיה טאיה: מוסי, המספר הזה, לדעתך, הוא זוגי או אי-זוגי?

מוסי – כדי לגלות צריך לנסות לסדר את המספר הזה בזוגות. הנה העשירייה הראשונה, אני מסדר אותה בזוגות, הצלחתי לעשות זאת ללא שארית. עכשיו אעשה את אותו הדבר עם העשירייה השנייה... וגם עם השלישית... יצאו לי הרבה זוגות וגם שלוש אבנים נוספות. אפשר לעשות מהן זוג אחד, אבל נשארה אבן אחת שממנה אי-אפשר לעשות זוג.

הפיה טאיה: אז מספר האבנים הוא מספר זוגי או אי-זוגי?

מוסי: זה מספר אי-זוגי.

הפיה טאיה: אבל מה אתה חושב, מוסי, המספר הזה הוא ראשוני?

מוסי: אי-אפשר לחלק אותו בשתיים. כמובן שאפשר לחלק את הקבוצה כולה לחלקים של אבן אחת, אבל האם אפשר לחלק אותה לחלקים שווים נוספים?

אם ניקח מכל עשירייה אבן אחת, אז נקבל שלוש, וכל קבוצה של תשע אבנים נותרות אפשר לחלק לשלוש. כלומר, את המספר הזה אפשר לחלק בשלוש!

הפיה טאיה: יישר כוח, מוסי. אתה תהיה מתמטיקאי או מי שאוהב מתמטיקה ומשתמש בה בעיסוקיו. ובכן, אפשר לחלק את המספר הזה בשלוש, וזה אומר שזה לא מספר ראשוני. הרי חוץ מחלוקה במספר "אחת", את המספר שלנו אפשר לחלק בשלוש. אין זה אומר שאי-אפשר לחלק אותו לחלקים אחרים. אבל אם אנחנו מצליחים לחלק את המספר במספר שהוא קטן ממנו וגדול ממספר אחת, אז המספר שלנו לא ראשוני. זה מספר פריק.

ובכן, מספר האבנים האדומות זה מספר פריק. אל אף שאתה עדיין לא יודע מה גודלו ומה שמו, אתה כבר יודע שזה לא מספר ראשוני אלא מספר פריק. ומה אתה חושב, מוסי, מספר "אחת" – זה מספר ראשוני או פריק?

מוסי: זה פשוט מאוד: אם יש לי רק אבן אחת, אי-אפשר לחלק אותה לחלקים שווים הכוללים פחות מאבן אחת. זה אומר שמספר "אחת" זה מספר ראשוני.

הפיה טאיה: מוסי, תשובתך מבוססת על כלל שלפיו מגדירים מספר ראשוני. אבל לכל כלל יש יוצאים מן הכללים. דע, מוסי, שהוסכם כי המספר "אחת" הוא לא ראשוני ולא פריק. זהו מספר ייחודי, התחלה ובסיס של כל המספרים, ולכן הוא יוצא מן הכלל.

הקשר בין מספרים זוגיים וראשוניים – סוגייה בת יותר מ-280 שנה

כמו שכבר למדנו, מוסי, כל מספר ראשוני למעט מספר "שתיים" חייב להיות מספר זוגי. אף מספר זוגי אחר לא יכול להיות ראשוני, אך בין מספרים זוגיים למספרים ראשוניים יש קשר. כלומר, ההנחה היא שכל מספר זוגי טבעי שגדול ממספר שתיים מהווה סכום של שני מספרים ראשוניים. למשל, מספר זוגי "שמונה" הוא סכום של שני מספרים ראשוניים, "שלוש" ו"חמש". מספר זוגי "עשר" הוא סכום של שני מספרים ראשוניים "שלוש" ו"שבע". ומספר זוגי "שש" הוא סכום של שני מספרים ראשוניים שווים – "שלוש", ו"שלוש". אותו מספר "שש" הוא סכום של שני מספרים שונים – "אחת" ו"חמש", אבל כפי שכבר אמרנו, מספר "אחת" לא נחשב מספר ראשוני, לכן החלוקה היחידה של מספר "שש" לשני מספרים ראשוניים – "שלוש" ו"שלוש".

ההנחה כי כל מספר זוגי החל ממספר "ארבע" ניתן להציג בתור סכום של שני מספרים ראשוניים נבדקה עבור מספרים זוגיים רבים, אך לא הוכחה לכולם. אם מתישהו תמצא הוכחה כזו, תהיה ממש מפורסם.

וכעת, מוסי יקירי, נעבור לנושא אחר של השיעור שלנו – השוואת שני מספרים.

איך להשוות שני מספרים מבלי לדעת את גודלם

בחלק הזה של השיעור תלמד להשוות שני מספרים מבלי לדעת מה הגודל שלהם. בין שני מספרים יכול להיות יחס זהה ליחס בין גבהים של ילדים. יש לך הרבה חברים, מוסי, תגיד מי מהחברים שלך גבוה ממך? אתה מכיר כזה?

מוסי – כמובן שאני יודע. דניאל גבוה ממני. הוא גבוה ממני בראש, וגילו לא שונה בהרבה מגילי, הוא רק בן שלוש וכמה חודשים.

הפיה טאיה – ואתה מכיר מישהו מהחברים שלך שנמוך ממך?

מוסי – אלה קטנטנים, הם ממש קטנים. לשכנים שלנו יש בן בשם איתן, הוא בן שנתיים. כשהוא נמצא לידי, הוא בקושי עומד על הרגליים, ואני, כמובן, הרבה יותר גבוה ממנו.

הפיה טאיה – ועכשיו נשאלת השאלה הקשה ביותר, מוסי. האם יש מישהו מהחברים שלך שהגובה שלו שווה לגובה שלך?

מוסי – משום מה אני לא זוכר אף אחד שגובהו שווה לשלי. אולי ברוך. המשפחה של ברוך עלתה ארצה לא מזמן ולילד הזה קראו ברתולד, אבל עכשיו קוראים לו ברוך. כשאנחנו עומדים אחד ליד השני, יכול להיות שאחד מאיתנו ממש קצת יותר גבוה מהשני. לי נדמה שאנחנו באותו גובה.

הפיה טאיה – אבל במספרים אין מושג כזה "ממש קצת". בין מספרים יש רק שלושה סוגים של יחסים: מספר אחד גדול מהשני, מספר אחד קטן מהשני או שני המספרים שווים. מספר אחד לא יכול להיות "ממש קצת" גדול מהשני. אם הוא יותר גדול, אז הוא פשוט יותר גדול וזהו. אם הוא ממש קצת יותר קטן, אז הוא קטן יותר, או שהם שווים לחלוטין. וכרגע נלמד איך אפשר לגלות את זה. תראה, תיכף יופיעו לפניך שני מספרים, כלומר שתי ערמות של אבנים בצבעים שונים.

הנה אני שולחת את הקרן שלי והיא תיצור משהו חדש על הלוח. ספר לי מה אתה רואה.

מוסי – אני רואה שעל הלוח הופיעו אבנים יפיפיות בצבע תכלת, בצבע של השמיים. הן הסתדרו בשורה אחת ומתחתיה הופיעה שורה של אבנים בצבע צהוב. שתי שורות שונות של אבנים – אבנים צהובות מתחת לאבנים תכולות, כאילו חולות מתחת לכיפת השמיים.

הפיה טאיה – מוסי, אתה יכול לקבוע מספר של אילו אבנים גדול יותר של אילו קטן יותר? או שאולי מספר האבנים התכולות שווה למספר האבנים הצהובות?

מוסי – לא, אני לא יכול להגיד בוודאות. נראה כאילו מספר האבנים הצהובות גדול יותר, אבל יכול להיות שיש יותר אבנים תכולות?

הפיה טאיה – כעת נשתמש בשיטה המתאימה ונדע בדיוק מספר של אילו אבנים גדול יותר. אנחנו נעשה התאמה בין אבנים תכולות לצהובות בכך שמתחת לאבן תכולה ראשונה תהיה אבן צהובה ראשונה, מתחת לאבן תכולה שנייה תהיה אבן צהובה שנייה וכל הלאה. מה אתה רואה עכשיו?

מוסי – אני רואה שתי שורות של אבנים המסודרות כפי שאמרת. מתחת לאבן תכולה אחרונה אני רואה אבן צהובה, אבל היא לא האחרונה בשורתה. אחריה יש עוד שתי אבנים צהובות.

הפיה טאיה – ועכשיו תגיד לי, מוסי, מה אתה חושב, אבנים באיזה צבע יש יותר?

מוסי – ברור שיש יותר צהובות. יש אותו מספר של אבנים צהובות ואבנים תכולות שנמצאות מעליהן, אבל יש שתי אבנים צהובות נוספות שמעליהן אין אבנים תכולות. כלומר מספר האבנים הצהובות גדול יותר ממספר האבנים התכולות.

הפיה טאיה – ואם אוריד את שתי האבנים הצהובות האלה? הנה, אני שולחת הקרן ושתי אבנים צהובות אחרונות נעלמות. מה היחס עכשיו בין הצהובות לתכולות?

מוסי – המספרים האלה שווים. מספר האבנים הצהובות שווה למספר התכולות.

הפיה טאיה – יופי, מוסי. ואם ארצה עכשיו שמספר התכולות יהיה קטן יותר ממספר הצהובות, מה צריך לעשות?

מוסי – צריך להוריד שלוש תכולות, למשל.

הפיה טאיה – זה מה שנעשה. הינה הקרן שלי מורידה את שלוש האבנים התכולות האחרונות. כעת השורה הצהובה נמשכת מתחת לשורה התכולה, היא ארוכה ממנה בדיוק בשלוש אבנים. עכשיו יש לנו יותר צהובות מאשר תכולות בדיוק בשלוש אבנים.

ועכשיו, מוסי יקירי, הגענו לנושא המסכם של השיעור שלנו. אתה כבר יודע שבין מספרים טבעיים יש מספרים מסוגים שונים: זוגיים, אי-זוגיים, ראשוניים, פריקים. וכעת אכיר לך עוד סוג של מספרים טבעיים.

מספרים משוכללים

כעת לפניך רק קבוצת אבנים אחת, והן בצבע כחול. תספור אותן, בבקשה.

מוסי – אחת, שתיים, שלוש, ארבע, חמש, שש. סך הכל שש אבנים.

הפיה טאיה – וכעת, מוסי, נחלק את קבוצת האבנים הזו לחלקים שווים, כשבכל אחד מהם פחות אבנים מאשר בקבוצה כולה. לצורך כל חלוקה אצור קבוצה של שש אבנים בצבע מסוים.

הנה לפניך קבוצה של שש אבנים אדומות. חלק את הקבוצה לחלקים שווים של אבן אחת עם רווח ביניהן.

מוסי – אני כבר עושה את זה במהירות רבה. כבר עשיתי.

הפיה טאיה – והנה לפניך קבוצה של שש אבנים כתומות. תחלק את הקבוצה הזו לחלקים הכוללים שתי אבנים כל אחד. מוסי, כמה חלקים כאלה יצאו לך?

מוסי – יצאו שלושה חלקים בדיוק.

הפיה טאיה – ואת הקבוצה הזאת של שש אבנים צהובות חלק לחלקים שווים הכוללים שלוש אבנים בכל חלק. כמה חלקים כאלה יצאו לך?

מוסי – בדיוק שני חלקים.

הפיה טאיה – שים לב, מוסי, שבכל החלוקות האלה לא הייתה שארית. אבל מה יקרה אם תנסה לחלק קבוצה חדשה של שש אבנים ירוקות לחלקים שווים של ארבע אבנים כל אחד?

מוסי – התקבלה קבוצה אחת ושתי אבנים ירוקות בשארית.

הפיה טאיה – ואם תנסה לחלק את הקבוצה הזאת של שש אבנים תכולות לחלקים שווים כשבכל חלק חמש אבנים, מה ייצא לך?

מוסי – התקבל חלק אחד ואבן אחת בשארית.

הפיה טאיה – הנה, מוסי, חילקנו את המספר שש בכל המספרים שקטנים ממנו. וכעת, מוסי, נטפל רק בחלוקות שלא היו בהן שאריות. הנה אני מורידה את הקבוצות של אבנים ירוקות ותכולות. קח מהאבנים האדומות חלק ראשון שהתקבל בחלוקה, ותעשה את אותו הדבר עם האבנים הכתומות והצהובות. לאחר מכן, תרכיב מכל האבנים שלקחת קבוצה אחת. כשתסיים אומר לך מה צריך לעשות הלאה.

מוסי – סיימתי, עשיתי כל מה שאמרת: משורת האבנים האדומות לקחתי אבן אחת, משורת האבנים הכתומות – שתי אבנים, ומשורת האבנים הצהובות – שלוש.

הפיה טאיה – מצוין, עשית הכל נכון. כעת אשאיר על הלוח רק את הקבוצה הראשונית של אבנים כחולות, ואת הקבוצה הזו של אבנים בצבעים שונים שכרגע הרכבת. אני מסדרת גם אותן בשורה אחת וצובעת אותן בצבע אחד – בסגול. וכעת מה אתה רואה על הלוח?

מוסי – אני רואה שתי שורות של אבנים – בשורה אחת יש אבנים בצבע כחול ובשורה שנייה – בצבע סגול.

הפיה טאיה – וכעת, מוסי, תגיד כמה אבנים סגולות יש בשורה שנייה בלי לספור אותן.

מוסי – יש שש אבנים סגולות בדיוק.

הפיה טאיה – למה הגעת למסקנה כזו?

מוסי – כי מתחת לכל אבן בשורה הראשונה יש אבן בשורה השנייה ומעל כל אבן בשורה השנייה יש אבן בשורה הראשונה. אני יודע שבשורה הראשונה שהיא שורת האבנים הכחולות, יש שש אבנים, לכן גם בשורה של אבנים סגולות יש שש אבנים.

הפיה טאיה – חשיבה מעולה, מוסי! למדת כלל של השוואת שני מספרים המיוצגים על ידי קבוצות של חפצים. וכעת בוא ניזכר במה שעשית. בהתחלה חילקת את הקבוצה של שש אבנים לחלקים שווים, קטנים יותר מהקבוצה השלמה. לאחר מכן, לקחת מכל החלוקות שלא היו בהן שאריות חלק אחד והרכבת מהחלקים האלה קבוצה אחת. הסתבר שהקבוצה הזאת של האבנים בצבעים שונים שהפכו לאבנים סגולות מייצגת את אותו המספר כמו קבוצת המוצא של האבנים הכחולות. ועכשיו תקשיב לי, מוסי:

אם מספר טבעי מתחלק ללא שארית במספרים טבעיים אחרים שקטנים ממנו, הסכום של כל מספרים הקטנים יותר שווה למספר המוצא, והמספר הזה נקרא "מספר משוכלל". מספר "שש" הוא מספר משוכלל.

ובכן, קבענו שהמספר "שש" הוא מספר משוכלל. בקרב המספרים הטבעיים יש הרבה, אפשר להגיד שיש אינסוף מספרים משוכללים, אבל בעשירייה הראשונה קיים רק מספר משוכלל אחד – שש. בעשירייה השנייה אין אף מספר משוכלל, ובעשירייה השלישית יש מספר אחד כזה. אני מציעה לך,

מוסי, לגלות את המספר הזה בעצמך. הפעולות הנדרשות לגילוי כזה – חילוק של מספר לחלקים שווים והשוואת שני מספרים. למדת לעשות את כל זה בעזרת קבוצות של חפצים. במקרה שלנו אלה היו אבנים, אבל במקומם יכולים להיות חפצים אחרים, למשל, כדורים או מקלות. אני יודעת שאצלכם בגני ילדים ובבתי ספר בתור חפצים לבניית קבוצות המייצגות מספרים משתמשים במקלות הנקראים "בדידים".

כך שאני נותנת לך, מוסי, שיעורי בית – לגלות את המספר המשוכלל השני הנמצא בעשירייה השלישית. אתן לך רמז: זה מספר זוגי. כשתמצא אותו תייצג אותו בתור סכום של שני מספרים ראשוניים. אני בטוחה שתצליח להשלים את המשימה שלי. וכשזה יקרה, ניפגש שוב, לכן אני לא אומרת "שלום", אני אומרת "להתראות, בן חסותי היקר"! ובינתיים תטפח ידידות עם הסנדק שלך, תגלה הרבה דברים מעניינים על מספרים! בכך מסתיימת המשמרת שלי בביתך.

4. יום חדש – עולם חדש

ובאותו הרגע מוסי הביט סביבו. איזו פיה? איזה לוח?
הוא שוכב במיטתו, מעקה מיטתו מורם. נהיה אור בחדר, והוא יכול לראות את כל החפצים בתוכו. אבל מה זה? הוא הרים את ראשו וראה את הנברשת התלויה. היא אחת, אין לה זוג. מתחתיה שולחן, הוא אחד ואין לו זוג. אבל ליד השולחן עומדים ארבעה כיסאות. שני זוגות של כיסאות!
עכשיו כל זה עבר במוחו, והרי לפני כן הוא לא חשב על מספרים ולא הבחין בהם. והוא חשב: איפה הפיה טאיה? הוא נזכר בהכל, אבל חשב שהוא ראה חלום. אולי זה בכלל לא קרה, וזה היה רק חלום. ואז נפתחה הדלת, ונכנסה אימא של מוסי. היא הייתה לבושה בצורה מהודרת וחגיגית יותר מהרגיל. היא ניגשה למוסי, חיבקה אותו ואמרה: "יום הולדת שמח, בני היקר! לא שכחת שיש לך יום הולדת היום?"

ואז מוסי נזכר. הוא זכר את זה אתמול, אבל אחרי הפגישה עם הפיה טאיה, זה משום מה פרח מזיכרונו. ועכשיו הוא שוב נזכר בזה.
"צריך להתלבש, רד למטה. כולם מחכים לך שם! הכנו לך מתנות. אתה אפילו לא מתאר לעצמך אילו מתנות הן! כולנו הכנו לך מתנות".
אימא ניגשה לחלון והעלתה את התריסים. החדר נשטף באור השמש. הבוקר היה בעיצומו.
אימא אמרה:

"בוא נרד מהר. מחכים לך שם כדי לברך אותך ולהעניק לך מתנות, אתה לא מתאר לעצמך איזו מתנה נפלאה הכינו לך אוגוסטה ותומאס. אתמול הם כמעט כל היום היו בחולות מחוץ ליישוב שלנו. שם אוגוסטה הרבה זמן חפרה גומה בחול, תומאס קפץ אל תוך הגומה המתהווה ועזר לה משם. העבודה נמשכה עד שהם מצאו צדף הזוהר בחושך באור קסום, אחד הצדפים שנשארו כאן כשנסוג היים ובמקומו התפשטו במקום הזה חולות".

כל זה אמרה אימא כשמוסי כבר ישב בקצה המיטה, ואימא הפשיטה אותו מהפיגימה כדי להלביש אותו בבגדים חגיגיים התלויים על גב הכיסא שליד השולחן.

באותו הזמן נזכר מוסי בכל מה שקרה לו בזריחה וחשב שכל זה היה חלום.

אבל אז אימא ניגשה לשולחן כדי לקחת את הבגדים החגיגיים מהכיסא ופתאום קראה בהתפעלות: – האם דודה לינדה כבר הייתה פה והשאירה את המתנה היקרה שלה – שישה יהלומים קטנים מלוטשים היטב בצורת אבנים – שלוש בצבע תכלת ושלוש בצבע צהוב! צריך כמה שיותר מהר להתקשר אליה ולשאול איך בדיוק היא הביאה את מתנתה. דודה לינדה הייתה קרובת משפחה עשירה של משפחת גרוס, היא הייתה בעלת מניות של בורסת היהלומים ברמת גן וכן בעלת חנות התכשיטים בתל-אביב. מוסי לא ענה דבר לקריאות אימו, אבל הבין שכל מה שקרה לו בזריחה לא היה בחלום. זה קרה במציאות.

הפיה טאיה באמת הייתה כאן, והיא זו שהשאירה לו מתנה יקרת ערך ליום הולדתו – שישה יהלומים המסמלים את המספר המשוכלל הראשון – "שש".

היא זו שלימדה אותו את השיעור הראשון במתמטיקה, השיעור שפתח לו דלת לעולם שהיה חדש לו – עולם המספרים. הוא ראה את נוכחותו בחדר הזה. הנה נברשת התלויה בתקרה, היא אחת. מתחת לנברשת עומד שולחן. הוא אחד. סביב השולחן עומדים כיסאות, בדיוק ארבעה. הוא נזכר במספרים שבגוף שלו והזיז את האצבעות ביד ימין. יש בדיוק חמש אצבעות. וביד שמאל בדיוק אותו המספר – חמש. יחד בשתי הידיים יש עשר אצבעות. המספר "עשר" – מספר חשוב מאוד, הוא בסיס הספירה. הפיה טאיה לימדה את מוסי שבעזרתו אפשר להגדיר מספרים גדולים מבלי לדעת את השמות שלהם. מוסי נזכר בכל זה במשך כמה דקות, בזמן שאימא הספיקה להלביש אותו בבגדים חגיגיים: מכנסיים קצרים וחולצה עם שרוולים קצרים ועם כיתוב בעברית. אימא, אבא ואליס קראו עברית חופשי, אבל מוסי עוד לא הכיר אפילו את האלף-בית. הוא היה אמור ללמוד את זה בגן ילדים שאליו היה אמור להיכנס בימים הקרובים בהתאם לחוק חינוך חובה לילדים בני שלוש ומעלה. לו מוסי כבר ידע לקרוא עברית, הוא היה קורא את מה שכתוב על חולצתו – "ילד טוב מי-נס".

כשאימא סיימה להלביש את מוסי, היא אחזה בידו והובילה אותו מהחדר למדרגות היורדות למטה. הם התחילו לרדת, ומוסי בעצמו הופתע מכך שהוא סופר מדרגות: "אחת, שתיים, שלוש..." היו בדיוק עשר מדרגות, ומוסי ספר עד המדרגה האחרונה. הרי הפיה טאיה לימדה אותו לספור עד עשר, והוא לא שכח את זה.

כשהם ירדו לקומה הראשונה, אימא הביאה את מוסי לדלת של החדר הגדול ביותר בבית. בחדר הזה הם חגגו את החגים בחוג המשפחה, ערכו סעודות שבת ונהנו לארח חברים. אימא נתנה דחיפה קלה לדלת, וברגע שזו נפתחה, בחדר מלמעלה נשמעה מנגינה המוכרת לכולם עם הברכה ליום הולדת בשפה האנגלית:

Happy Birthday To You,
Happy Birthday To Mosy
Happy Birthday To You...

כשהם נכנסו לחדר, מוסי ראה שהשולחן הגדול שעמד בדרך כלל במרכז החדר, הוזז לחלון והוא ערוך לחגיגה, ובמרכז החדר במקום השולחן נמצא כיסא שסביבו עומדים אבא, אליס ואוגוסטה עם תומאס על גבה. אבא ואליס מוחאים כפיים בקצב המנגינה, אוגוסטה מכשכשת בזנבה ותומאס חוזר על תנועותיה. אימא הושיבה את מוסי על הכיסא והצטרפה לאבא ולאליס. כולם התחילו ללכת סביב הכיסא כל עוד נשמעה המנגינה החגיגית.

כשהמנגינה הסתיימה, אוגוסטה הפילה את תומאס על הרצפה, קפצה וליקקה את פניו של מוסי – זה היה סוג של אקורד הסיום של ברכת יום ההולדת המשפחתית. כעת הגיע תורן של המתנות. כל המתנות כבר היו מונחות על המעמד שניצב על במה נמוכה ליד הקיר מול הקיר שלידו עמד השולחן. מוסי ניגש למעמד והתחיל להתבונן במתנות ולהכיר אותן. אבא העניק לו משחק הרכבה מדבר שהיה מסוגל לתת לו משימות בקול של אבא, לכוון אותו ולהעריך את איכות ביצוע המשימה, וכן לעזור לתקן טעויות. כשבעצתו של אבא לחץ מוסי על אחד הכפתורים בלוח הימני של משחק ההרכבה, נשמע קול של אבא שאמר: "בוא ננסה" ונשמע גם צחוקו של אבא.

אימא העניקה למוסי במתנה אוטו אמיתי, אך קטן, בצבע אדום עם גג פתוח. היה בו מושב לנהג והגה, ויחד עם זה שובצה בו מערכת בטיחות שדאגה לכך שהאוטו לא ייתקל במכשולים ולא ייפול לבורות. מוסי החליט שכבר היום הוא ינסה לנהוג באוטו. המתנה של אליס כאילו הוזמנה בידי הפיה טאיה. זו הייתה חשבוננייה של ספירה על בסיס עשר עם שבעה צירים. על כל ציר היו עשרה חרוזים מאותו צבע, וצבעים של שבעת הצירים תאמו לצבעי קשת. החרוזים המסמלים את היחידות בציר התחתון היו בצבע אדום. החרוזים המסמלים עשרות היו בצבע כתום ובציר השני. גם הם היו עשרה בדיוק. החרוזים בציר השלישי היו בצבע צהוב, בציר הרביעי – בצבע ירוק, בציר החמישי – בצבע תכלת, בציר השישי – בצבע כחול, ובציר השביעי – בצבע סגול.

בכל אחד מהצירים היו עשרה חרוזים בדיוק, ובעזרת החשבוננייה הזו היה אפשר להציג את כל המספרים שגודלם קטן מ-10 מיליון – לפי השיטה העשרונית – ולבצע בהם ארבע פעולות חשבון. אפשר היה להניח את החשבוננייה בצורה אנכית, כך שלמטה יהיה הציר עם החרוזים האדומים, או בצורה אופקית, כך שהציר הזה יהיה מהצד השמאלי. את כל זה מוסי היה עתיד ללמוד.

נציין גם שאף על פי שהחשבוננייה הזו נראתה רגילה למדי ודומה לכל החשבונניות הקיימות, הייתה לה תכונה ייחודית המעידה על כך שהחשבוננייה נעשתה בהזמנה מיוחדת. באחת הדפנות שאליהן חוברו הצירים הוכנס גם מנגנון מוזיקלי שבעת תנועת חרוז היה משמיע צליל המתאים לתו מוזיקלי מסוים שהיה בתורו מתאים לצבע מסוים.

התו "דו" היה מקביל לצבע האדום, התו "רה" – לצבע הכתום, התו "מי" – לצבע הצהוב, התו "פה" – לצבע הירוק, התו "סול" – לצבע התכלת, התו "לה" – לצבע הכחול, התו "סי" – לצבע הסגול. בכך ייצגה החשבוננייה את כל צבעי הקשת ואת כל התווים המוזיקליים. מעצב מקצועי עיצב את החשבוננייה בהזמנה אישית.

כשהציגו בחשבוננייה הזו מספרים וביצעו בהם פעולות חשבון, בו בזמן נוצרה ונשמעה מנגינה. אם היה צורך או רצון לכך, אפשר היה לכבות את המנגנון המוזיקלי, ואז החשבוננייה הפכה לחשבוננייה רגילה אך צבעונית.

מעל כל המתנות על מעמד נפרד הוצב צדף גדול, מתנת אוגוסטה ותומאס. עכשיו הוא לא זהר כי היה אור בחדר. מוסי זכר מסיפורה של אימא שבחושך הצדף קורן אור. הוא חשב שהקרניים האלה יזכירו לו את קרן הקסם שיצאה מציפורנה של הפיה טאיה. אז הוא החליט לשמור בחדרו מתחת לצדף הזה את שש אבני היהלומים שהפיה טאיה נתנה לו. המתנות של המשפחה היו נפלאות, אבל מוסי ראה במתנתה של הפיה טאיה את המתנה הטובה ביותר.

כשהוא יראה את הקרניים היוצאות מהצדף הוא ייזכר בפיה טאיה ובעולם ענק וחדש שהיא נתנה לו במתנה, עולם הסובב אותו ואת הכל ביקום – עולם המספרים, עולם חי, פועל ומדבר עם אלה שמבינים את שפת המספרים. מוסי רק עתיד ללמוד אותו, אבל הוא כבר מוכן לזה, הוא רוצה בזה, והרצון הוא מפתח להצלחה! יום הולדת שמח, מוסי!

דרך צלחה אל התעלומות האינסופיות של היקום, מהגלקסיה שלנו עד ל"אפרכסיה".

סוף דבר

האגדה שלנו המיועדת לכם, קוראינו הקטנים, מסתיימת. תודה שהייתם איתנו. תודה מיוחדת לשני ילדים שבהשראתם כתבנו אותה – הילדה אליסה והילד אלכסנדר.