אלי שור

אפסים רכים ומשפט פרמה

מעשיה מתמטית על הכנעת האפס הקשוח והופעת אפסים רכים

כאשר ה' יצר מספרים שלמים, הוא שיכן אותם בשמיים, באיזור הנקרא 'גן מספר' . המספרים על פני האדמות הם העתקות של מספרי השמיים. שני מלאכי ה' משרתים כגננים בגן זה ושומרים על הסדר.

והנה התקבלה תלונה מאת מספרים רבים על התנהגותו לא נאותה של המספר אפס.

בתקווה למלא את ריקנותו, הוא בולע מספרים אחרים על ידי הכפלתם בעצמו. הגננים מייד בודדו מספר זה וסגרו אותו. הדבר לא גרם לאי-נוחות רבה כי הרי בשמיים לא משתמשים בשיטות רישום מספרים המתבססות על שימוש באפס וניתן להסתדר בלי מספר זה המסמן סך הכול מקום ריק. אחר כך הגננים פיתחו זן חדש של אפסים אשר בפעולת כפל מאפסים רק מספרים מזן שלהם, בלי לפגוע במספרים אחרים, בניגוד לאפס המקורי המאפס בפעולה זו. את כולם. כנגד האפס הנוקשה האכזרי הזה , האפסים החדשים קיבלו את השם 'אפסים רכים'.

מסה מתמטית על הרחבת האפס מנקודה לקו והשלכותיה למשפט פרמה

"כפי שלמעלה, כך למטה". על פני האדמות אפסים רכים הומצאו על ידי שני חוקרים ישראליים מאוניברסיטת תל אביב. ההמצאה התממשה בעזרת עצם מפליא, מיוחד במינו, שניתן לקרא לו 'אפס - קו' עקב סימונו $\bar{0}$. אפס-קו שונה מאפס רגיל 0, אבל באופן מפליא ריבועו שווה ל-0.

בהכפלת אפס-קו במספרים ממשיים $a \neq 0$ מתקבלים מספרים חדשים $a\bar{0}$, הנקראים 'אפסים רכים'. בהכפלת אפס-קו במספר a=0 מתקבל אפס רגיח 0, הנקרא כעת 'אפס מוחלט'. כאשר שני אפסים רכים כופלים זה את זה, מתקבל אפס מוחלט. גם כאשר אפס רך מוכפל באפס מוחלט מתקבל אפס מוחלט. לעומת זאת, כאשר אפס רך מוכפל במספר ממשי השונה מאפס מוחלט, מתקבל אפס רך .

את קבוצת כל האפסים הרכים ביחד עם האפס המוחלט ניתן לתאר כך:

$$\left\{ a\bar{0} \right\}_{a \in \mathbb{R}}$$

נאשר **R** היא קבוצת כל המספרים הממשיים.

היות והקבוצה דלעיל נמצאת בהתאמה חד-חד-ערכית עם קבוצת מספרים ממשיים, יש לה עוצמת הרצף וניתן להציג אותה על ידי קבוצת כל הנקודות על קו ישר רציף. לקו זה קוראים 'קו האפס'. נסמן אותו ואת קבוצת האפסים המוצגת על ידיו באות L עם האינדקס התחתון 0 (the 0-lime) :

$$L_0 = \left\{ a\bar{0} \right\}_{a \in \mathbb{R}} .$$

במרכזו של קו האפס נמצא אפס רגיל או מוחלט (a=0), בצד אחד ממנו נמצאים אפסים רכים עם a>0 ובצד השני - אפסים רכים עם a<0.

בכך המושג של אפס מורחב מנקודה אחת לקו שלם. הרחבה זאת כל כך משמעותית שיש לה השפעה ניכרות על תכונות קבוצות וטענות משפטים. להדגמת הדבר נפנה למשפט פרמה האחרון המפורסם.

משפט זה עוסק במשוואה אלגברית עם שלושה נעלמים:

$$x^n + y^n = z^n \quad (*),$$

כאשר n מספר טבעי קבוע כלשהו והנעלמים x, y, z שייכים לקבוצת מספרים שלמים:

$$Z = \{,\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

הגדרה :
תהי ***E*** קבוצת מספרים כלשהי. השלשה (שלישיה) של מספרים (*p,q,r*) נקראת פתרון המשוואה (*) בקבוצה ***E*** אם כל שלושת מרכיביה שייכים קבוצה ***E*** והצבתם למשוואה במקום *x, y, z* בהתאמה, הופכת משוואה זו לזהות.

משפט 1:
יהי *m* מספר שלם כלשהו. אזי השלשות (0,*m,m*), (*m*,0,*m*) מהוות פתרונות בקבוצה **Z** של המשוואה (*) עם *n* טבעי כלשהו. הפתרונות הנוספים במקרה של *n* זוגי הם (0,*m,-m*), (*m*,0,-*m*), ובמקרה של *n* אי-זוגי – (*m,-m*,0) .

הוכחה: המרכיבים של כל שלשה המובאת במשפט שייכים לקבוצה ***Z***, והצבתם למשוואה (*) הופכת אותה, בתנאים הנתונים לגבי *n* , לזהות. לכן, בתנאים אלה, לפי ההגדרה דלעיל, השלשות שבמשפט הן פתרונות של המשוואה (*) בקבוצה ***Z***. מ.ש.ל.

נציין שאם *m*=0 כל הפתרונות של המשוואה (*) שהובאו במשפט 1 הופכים לפתרון אחד עם שלושה אפסים: (0,0,0). אם *m* הוא מספר שלם השונה מ-0 , אז כל הפתרונות הרשומים לעיל במשפט 1 שונים זה מזה ומכילים, כל אחד, אפס אחד בין שלושת המרכיבים. האם יש למשוואה (*) פתרונות עם שלושה מרכיבים שונים מ-0? התשובה לשאלה זו חיובית כאשר מעלת המשוואה היא 1 או 2. למשל, השלשה (3,4,7) היא פתרון של המשוואה (*) עם *n*=1, והשלשה (3,4, 5) היא פתרון של המשוואה (*) עם *n*= 2 . במקרה $n \geq 3$ התשובה לשאלה זו ניתנת על ידי המשפט הבא.

משפט פרמה האחרון (The Last Fermat Theorem)

למשוואה (*) עם $n \geq 3$ בקבוצה *Z* אין אף פתרון אשר בו כל שלושת המרכיבים שונים מ-0

הוכחת משפט זה נמצאה במלואה רק בסוף המאה ה-20, יותר משלוש מאות שנה אחרי ניסוחו על ידי פרמה. ההוכחה כבדה, הנשענת על תיאוריות מתמטיות מתקדמות. אין אפשרות להביא אותה כאן.

נרחיב כעת בקבוצה *Z* את נקודת האפס לקו האפס. נקבל קבוצה מורחבת

$$\bar{Z} = \{,\dots -3, -2, -1, L_0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

נציין שהחלפת נקודת האפס בקו האפס שינתה מקצה לקצה את עוצמת מקבוצה.: הקבוצה Z היא בת מנייה ולקבוצה $\bar{Z}$ יש עוצמת הרצף. גם משפט פרמה בניסוחו המובא לעיל, בהרחבה זו קורס, כפי שמראה המשפט הבא.

משפט 2

בקבוצה המורחבת $\bar{Z}$ למשוואה (*) עם n>1 יש אינסוף פתרונות עם שלושה מרכיבים שוניים מ-0.

הוכחה: הקבוצה L_0 מכילה אפס מוחלט אחד (0) ואינסוף אפסים רכים $a\bar{0}$ כאשר a מספר ממשי כלשהו השונה מ-0. לפי התכונה הבסיסית של אפסים רכים מתקיים:

$$\langle a\bar{0}\rangle^n = 0, \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

לכן כל שלשה $(a\bar{0}, b\bar{0}, c\bar{0})$ מקיימת את המשוואה (*) עם כל n טבעי הגדול מ-1. אם המספרים a, b, c שונים מ-0, כל מרכיבי השלשה שונים מ-0. היות ויש אינסוף שלשות כאלה, המשפט הוכח.

המשפט 2 נוגד למשפט פרמה באופן קיצוני כי במקום ' אין אף אחד' בא 'יש אינסוף'.

המשפט שהוא תואם למשפט פרמה בקבוצה המורחבת נשהע כך:

משפט 3:

בקבוצה המורחבת $\bar{Z}$ למשוואה (*) עם $n \geq 3$ אין אף פתרון שכל מרכיביו אינם שייכים ל- L_0 .

הוכחה: לפי משפט פרמה, למשוואה (*) עם $n \geq 3$ בקבוצה $Z \setminus \{0\}$ אין אף פתרון. אבל קבוצה זו זהה לקבוצה $\bar{Z} \setminus L_0$:

$$Z \setminus \{0\} = \bar{Z} \setminus L_0 = \{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ldots\}.$$

לכן למשוואה (*) עם $n \geq 3$ בקבוצה $\bar{Z} \setminus L_0$ אין אף פתרון. זה אומר שלמשוואה (*) עם $n \geq 3$ בקבוצה המורחבת $\bar{Z}$ אין אף פתרון שכל מרכיביו לא שייכים ל- L_0 . מ.ש.ל.

הערה 1:

על תולדות משפט פרמה ומשפטים מתמטיים מפורסמים נוספים ניתן לקרוא בספר של קלרה זיסקין ואלי שור "הסיפורים המפליאים של יער הקסם והבעיות המפורסמות של המתמטיקה "

(קבלת מידע בדואר אלקטרוני (claraz149@gmail.com)

הערה 2:

על המצאת אפסים רכים וקו האפס, על וישומם ליצירת תורת מספרים רכים ניתן לקרוא בספר הדוקטורט של משה קליין באוניברסיטת תל אביב בהנחיית פרופ' עודד מימון .