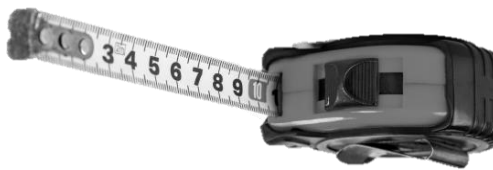


## שגיאות במדידות

### 1. משמעות המדידה בפיזיקה

1. מדידה היא תהליך שבמהלכו מוצאים את מספר הפעמים שבו יחידת המדידה חוזרת על עצמה בגודל הפיזיקלי הנמדד, וזאת על ידי שימוש במכשיר מדידה.
2. מכשיר המדידה הוא מכשיר שבאמצעותו מוצאים את מספר הפעמים שיחידת המדידה חוזרת על עצמה בגודל הנמדד.

לדוגמה, אם רוצים למדוד את אורך ספר ביחידות הסנטימטר, אנו מתכוונים למצוא את מספר הפעמים בה יחידת הסנטימטר חוזרת על עצמה לאורך הספר. דבר זה מתבצע באמצעות מכשיר מדידה שנקרא מטר או סרט מידה (ראה איור 1). מכשיר זה מורכב מסרט (עשוי ממתכת גמישה או מחומר פלסטי גמיש), המחולק לסנטימטרים, והסנטימטרים שבו מחולקים למילימטרים. על ידי מתיחת הסרט בין קצוות הספר לאורכו, ניתן למצוא את מספר הפעמים בו הסנטימטר חוזר על עצמו לאורך הספר.



איור 1: המטר- סרט מידה

באופן דומה, על מנת למדוד פרק זמן מסוים, יש למצוא את מספר הפעמים בה יחידת הזמן חוזרת על עצמה בפרק זמן זה. דבר זה נעשה באמצעות השעון (שעון עזר). אנו מפעילים את שעון העצר בתחילת פרק הזמן, ועוצרים אותו בסופו. קריאת שעון העצר המתקבלת היא מספר הפעמים בה יחידת הזמן (השנייה) חוזרת על עצמה בפרק זמן זה.

### 2. השגיאה במדידה

בכל פעולת מדידה, קיימת שגיאה בערך המתקבל עבור הגודל הנמדד. שגיאה זו נובעת מגורמים שונים, כמו מגבלות של מכשיר המדידה, או שגיאות הנובעות מאי דיוק של האדם המבצע את המדידה. חשוב מאוד להעריך גודל שגיאות אלה ולקחת אותן בחשבון כאשר רושמים את ערכו של הגודל הנמדד.

השגיאה בגודל פיזיקלי  $x$  מסומנת ב- $\Delta x$ . הגודל הפיזיקלי הנמדד כולל השגיאה רושמים באופן הבא:  $x \pm \Delta x$ . לדוגמה, אם מודדים מסה מסוימת, ומקבלים  $m = 20\text{g}$ , והשגיאה היא  $\Delta m = 2\text{g}$ , רושמים:  $m = 20\text{g} \pm 2\text{g}$ . משמעות רישום זה שגודל המסה הנמדדת (כולל השגיאה) נמצא בתחום שבין 18g ל-22g.

הערכת גודל השגיאה בגודל הנמדד היא פעולה חשובה מאוד על מנת לקבוע אם המדידה שבצענו היא נכונה או לא. בניסויים שמבצעים במעבדה, אנו מודדים גדלים וקבועים פיזיקליים ומשווים אותם לערכים התיאורטיים שלהם. בדרך כלל, כאשר משווים בין הערך המתקבל מהניסוי עבור הגודל הפיזיקלי הנמדד (או ערך הקבוע הנמדד) לבין הערך התיאורטי שלו, מוצאים שקיים הפרש בין שני גדלים אלה. אז האם משמעות הדבר היא שהמדידה שבצענו היא לא נכונה? התשובה תלויה בשגיאה במדידה.

גודל השגיאה במדידה משמש כמדד המאפשר לנו לקבוע באם המדידה שבצענו נכונה או לא. אם הפרש בין הגודל הנמדד לערך התיאורטי שלו (בערך המוחלט) קטן מהשגיאה במדידה, נקבל שהמדידה שערכנו היא נכונה, אחרת המדידה שגויה. במלים אחרות, אם הערך התיאורטי של הגודל שמדדנו נמצא בתחום השגיאה של הערך הנמדד, המדידה תקינה, אחרת היא לא נכונה.

לדוגמה, נניח שערכנו ניסוי במעבדה למדידת תאוצת הכובד וקיבלנו את התוצאה  $9.5 \text{ m/s}^2$ . ידוע לנו שתאוצת הכובד על פני הקרקע היא  $9.8 \text{ m/s}^2$ . אם נשווה בין גודל תאוצת הכובד שהתקבל בניסוי לבין הערך התיאורטי של תאוצה זו, ברור שהמדידה שבצענו היא לא נכונה, כי גדלים אלה שונים זה מזה. אבל לא כך הדבר אם ניקח בחשבון את השגיאה במדידה. אם השגיאה במדידה שביצענו היא  $0.5 \text{ m/s}^2$ , כלומר  $g = (9.5 \pm 0.5) \text{ m/s}^2$ , ברור שהתוצאה שקיבלנו היא נכונה, כי הערך התיאורטי שהוא  $9.8 \text{ m/s}^2$  נמצא בתחום השגיאה של הניסוי כי מתקיים  $(9.8 - 9.5) < 0.5$ . במלים אחרות, הערך התיאורטי של תאוצת הכובד נמצא בתחום הערך שהתקבל במדידה (כולל השגיאה) שהוא  $9 \text{ m/s}^2 \leq g \leq 10 \text{ m/s}^2$ .

השאלה כעת היא איך ניתן להעריך את השגיאה בגודל הנמדד? התשובה תלויה בסוג השגיאה. ישנם שני סוגי שגיאות עיקריים: שגיאה מוחלטת ושגיאה אקראית. בסעיף 3 נדון בשגיאות אלה. בסעיף 4 נדון כיצד ניתן להקטין שגיאות אלה (על ידי הקטנת השגיאה היחסית או חזרה על המדידה מספר פעמים). בסעיף 5 נדון בחישובי שגיאות.

### 3. סוגי שגיאות

#### 3.1 שגיאה מוחלטת

השגיאה המוחלטת בגודל פיזיקלי הנמדד באמצעות מכשיר מדידה מסוים שווה לגודל הקטן ביותר שמכשיר זה מסוגל למדוד (הדיוק המקסימלי של המכשיר).

לדוגמה, האורך המינימלי שיכול למדוד סרגל רגיל הוא מילימטר (1mm), לכן השגיאה המוחלטת במדידת אורך באמצעות סרגל היא  $1 \text{ mm} = 0.1 \text{ cm}$ . לכן אם מודדים אורך ספר באמצעות סרגל ומתקבל הערך  $\ell = 25.4 \text{ cm}$ , נרשום את המדידה באופן הבא:  $\ell = (25.4 \pm 0.1) \text{ cm}$ .

יש לציין שאם מקבלים שאורך הספר הוא  $24 \text{ cm}$ , לא רושמים את המדידה כך:  $\ell = (24 \pm 0.1) \text{ cm}$ , אלא  $\ell = (24.0 \pm 0.1) \text{ cm}$ , וזאת על מנת לציין שהשגיאה היא בספרה הראשונה אחרי הנקודה העשרונית.

דוגמה נוספת, אם מאזניים מודדים מסה בדיוק של  $1 \text{ g}$ , אז השגיאה המוחלטת במדידת מסה באמצעות מאזניים אלה היא  $1 \text{ g}$ . לכן אם מודדים מסת גוף באמצעות מאזניים אלה ומתקבלת הקריאה  $m = 1253 \text{ g}$ , רושמים את המדידה באופן הבא:  $m = (1,253 \pm 1) \text{ g}$ . אם רוצים לבטא את הקריאה בקילוגרמים, רושמים:  $m = (1.253 \pm 0.001) \text{ kg}$ , כאשר הצבנו  $1 \text{ g} = 0.001 \text{ kg}$ .

השגיאה המוחלטת נקראת כך מכיוון שהיא גודל קבוע שאינו תלוי בגודל הנמדד. שגיאה זו תלויה רק במכשיר המדידה. לדוגמה, אם מודדים אורך של  $10 \text{ cm}$  או  $29 \text{ cm}$  באמצעות סרגל, בשני המקרים השגיאה במדידה הנובעת משימוש בסרגל היא זהה ( $0.1 \text{ cm}$ ).

#### 3.2 שגיאה אקראית

השגיאה האקראית היא השגיאה הנגרמת מטעויות אקראיות בביצוע המדידה (שלווה הן טעויות של האדם המבצע את המדידה). לדוגמה, אם תלמיד רוצה למדוד פרק זמן מסוים באמצעות שעון עזר, הוא מפעיל את השעון בתחילת פרק זמן זה ועוצר אותו בסופו. בפעולה של הפעלת שעון העזר ועצירתו, תמיד יש שגיאה הנובעת מזמן התגובה של התלמיד, או הסחה כלשהי שגורמת לעיקוב בהפעלת השעון או עצירתו, או כל סיבה אחר. שגיאה זו היא אקראית, לפעמים התלמיד מפעיל את שעון העזר קצת לפני תחילת פרק הזמן ולפעמים אחרי תחילת פרק הזמן, או עוצר אותו

לפני או אחרי סיום פרק הזמן.

לשגיאות האקראיות אין חוקיות, לכן קשה מאוד להעריך אותן. בדרך כלל מעריכים את שגיאות אלה באופן גס. מכיוון שהערכת שגיאה באופן גס אינה מדעית, משתדלים להקטין את השגיאה האקראית במדידות ככל האפשר עד כדי הזנחה. בסעיף הבא נסביר כיצד עושים זאת.

## 4. כיצד להקטין את השגיאה המוחלטת והשגיאה האקראית?

### 4.1 הקטנת השגיאה המוחלטת

על מנת להבין כיצד ניתן להקטין את השגיאה המוחלטת, נגדיר קודם את השגיאה היחסית:

השגיאה היחסית היא היחס בין השגיאה המוחלטת במדידת גודל פיזיקלי מסוים לבין הערך של גודל זה כפי שנמדד בניסוי מוכפל ב-100%. על פי הגדרה זו נקבל שאם השגיאה המוחלטת במדידת גודל פיזיקלי מסוים היא  $\Delta x$ , וערכו של הגודל הנמדד הוא  $x$ , אז השגיאה היחסית במדידת גודל זה היא:

$$(1) \quad \frac{\Delta x}{x} \times 100\%$$

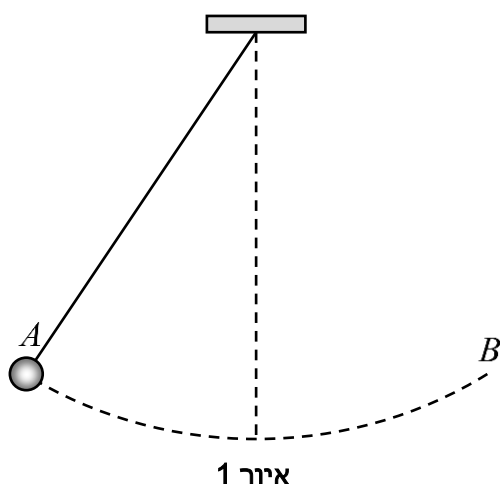
ברור, על פי הגדרה זו, על מנת להקטין את השגיאה היחסית יש להגדיל את הגודל הנמדד. לדוגמה אם מודדים פרק זמן מסוים באמצעות שעון עם דיוק של שנייה, כלומר השגיאה המוחלטת היא שנייה, אז אם פרק הזמן הנמדד הוא 10s השגיאה היחסית היא:

$$\frac{1s}{10s} \times 100\% = 10\%$$

לעומת זאת, אם פרק הזמן הנמדד הוא 100s השגיאה היחסית היא:

$$\frac{1s}{100s} \times 100\% = 1\%$$

לכן הכלל במדידות הוא להגדיל את גודלו של הגודל הפיזיקלי הנמדד וזאת על מנת להקטין את השגיאה היחסית. הקטנת השגיאה היחסית גורמת לכך שהשגיאה המוחלטת תקטן גם כן. נסביר זאת באמצעות הדוגמה הבאה:



נניח שרוצים למדוד את זמן המחזור של מטוטלת באמצעות שעון עצר (איור 1). לשם פשוטות נניח שהשגיאה המוחלטת של השעון היא  $\Delta t = 1s$  וזמן המחזור של המטוטלת הוא  $T = 2s$ .

אם מודדים זמן מחזור אחד, השגיאה היחסית תהיה:

$$\frac{1s}{2s} \times 100\% = 50\%$$

וזו שגיאה עצומה.

נניח שבמקום שנמדוד זמן מחזור אחד, מודדים את הזמן של 10 מחזורים (הגדלנו את פרק הזמן פי 10). השגיאה היחסית כעת היא:

$$\frac{1s}{20s} \times 100\% = 5\%$$

ברור שזמן המחזור הוא:

$$T = \frac{20s}{10} = 2s$$

והשגיאה בזמן המחזור היא:

$$5\%T = 5\%(2s) = 0.1s$$

לכן השגיאה המוחלטת שהייתה 1s קטנה פי 10 כעת.

## 4.2 הקטנת השגיאה האקראית

אם נמדוד גודל פיזיקלי מסוים (פרק זמן מסוים לדוגמה), התוצאה שתתקבל תהיה בדרך כלל או גדולה יותר או קטנה יותר מהערך המדויק של הגודל הפיזיקלי הנמדד, וזאת בגלל השגיאה האקראית במדידה. אבל אם מודדים אותו גודל פיזיקלי מספר פעמים, נקבל שחלק מהתוצאות הן גדולות יותר מהערך המדויק והחלק האחר של התוצאות קטנות מהערך המדויק. אם נחשב את הממוצע של כל המדידות נמצא שהתוצאה קרובה לערך המדויק. מתברר שככל שמגדילים את מספר המדידות יותר ויותר, הממוצע של המדידות מתקרב יותר ויותר לערך המדויק, משמע שמשקל השגיאה האקראית נעשה זניח יותר ויותר.

**מסקנה:** על מנת להקטין את השגיאה האקראית במדידת גודל פיזיקלי מסוים, יש לחזור על מדידה זו מספר רב של פעמים, גדול ככל האפשר, ולחשב את ממוצע המדידות.

להלן דוגמה להמחשת עניין זה: נניח שרוצים למדוד פרק זמן מסוים באמצעות שעון עזר, ונניח שממדיות קודמות ומדיקות ידוע שפרק זמן זה הוא 2s. אם נניח שבגלל שגיאה אקראית מקבלים את התוצאה:

$t = 1.8s$ , אחוז השגיאה במדידה זו גבוה:

$$\frac{2-1.8}{2} \times 100\% = 10\%$$

לעומת זאת אם מבצעים מספר מדידות עבור אותו פרק זמן, התוצאות שנקבל יהיו מפוזרות סביב לערך  $t = 2s$  וזאת בגלל השגיאה האקראית. נניח שנקבל את התוצאות המוצגות בטבלה הבאה:

מספר המדידה	הזמן בשניות
1	2.1
2	1.8
3	2.3
4	1.9
6	1.7
7	2.1
8	1.8

אם נחשב את ממוצע המדידות נקבל ש- $\bar{t} = 1.9875s$  והוא קורב מאוד לערך המדויק (2s). אחוז השגיאה כעת הוא:

$$\frac{2-1.9875}{2} \times 100\% = 0.625\%$$

והוא זניח.

הערה: אם כל תוצאות המדידות היו גדולות יותר או קטנות יותר מהערך המדויק של הגודל הפיזיקלי הנמדד, השגיאות במקרה זה הן לא אקראיות, אלא **שיטתיות**. מקרה זה נוצר מפגם במכשיר המדידה או מטעות חוזרת על עצמה בתהליך המדידה. במקרה זה יש לתקן את המכשיר או לגלות מקור השגיאה השיטתית.

**5. חישוב שגיאות**

נניח שמוודדים שני גדלים פיזיקליים  $A$  ו- $B$  ולאחר מכן מחשבים באמצעותם גודל שלישי  $C$ . במקרה זה, השגיאה בגודל  $C$  תלויה בגודל השגיאה של כל אחד משני הגדלים  $A$  ו- $B$ , וגם בסוג הפעולה המתמטית שבאמצעותה התקבל הגודל  $C$  משני הגדלים  $A$  ו- $B$ .

אם  $C$  התקבל מהגדלים  $A$  ו- $B$  על ידי אחת מהפעולות הבאות: חיבור, חיסור, מכפלה וחילוק, ישנם קשרים פשוטים לחישוב השגיאה ב- $C$  על סמך השגיאות בגדלים  $A$  ו- $B$ . (שים לב כאשר  $C = A + B$  או  $A - B$ , הגדלים  $A$  ו- $B$  חייבים להיות מאותו סוג ובאותן יחידות).

להלן טבלה לחישוב השגיאה ב- $C$  במקרים הנ"ל:

השגיאה ב- $C$	הפעולה
$\Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$	$C = A + B$
$\Delta C = \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2}$	$C = A - B$
$\Delta C = \sqrt{(B\Delta A)^2 + (A\Delta B)^2}$	$C = AB$
$\Delta C = \sqrt{\left(\frac{\Delta A}{B}\right)^2 + \left(\frac{A}{B^2}\Delta B\right)^2}$	$C = \frac{A}{B}$

לא נדון כאן במקרים מורכבים יותר.