מטוטלת מתמטית

א. מטרות הניסוי

1) להכיר את המטוטלת המתמטית ולבדוק את נוסחת זמן המחזור עבור מטוטלת זו.
2) מדידת תאוצת הכובד.

ב. רקע תיאורטי

מטוטלת מתמטית היא מטוטלת המורכבת ממסה הקשורה לנקודה קבועה בתקרה באמצעות חוט שמסתו זניחה, ואשר מתנדנדת הלוך ושוב במישור הניצב לפני הקרקע בזוויות קטנות (בתנועה הרמונית פשוטה).

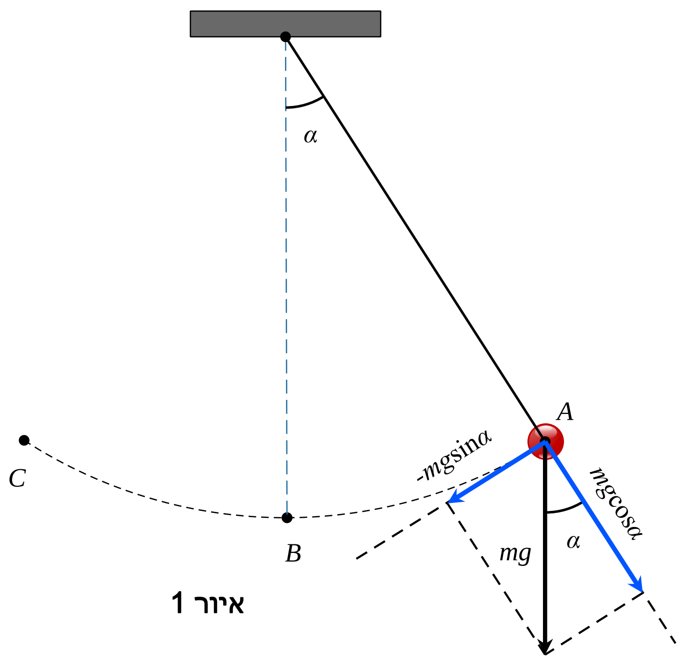
נראה בהמשך שהתנאי של תנודות בזוויות קטנות הוא תנאי הכרחי על מנת שתנועת המטוטלת תהיה תנועה הרמונית פשוטה. במקרה זה המטוטלת נקראת מטוטלת מתמטית, מכיוון שניתן לתאר אותה מתמטית ולמצוא ביטויים מתמטיים לזמן המחזור והתדירות שלה.

אם המטוטלת מתנדנדת בזוויות גדולות, התנועה לא תהיה תנועה הרמונית פשוטה, והמטוטלת לא תהיה מטוטלת מתמטית. במקרה זה לא ניתן למצוא ביטויים מתמטיים המתארים את זמן המחזור ואת התדירות של התנועה.

הכוח המחזיר שפועל על המסה במהלך תנועתה הוא רכיב כוח הכובד בכיוון המשיך למסלול התנועה שהוא נתון על ידי (ראה איור 1):

$$F_{G\parallel} = -mg\sin\alpha \qquad (1)$$

כאשר α היא הזווית בין החוט לאנך ו- m מסת הגוף. הסימן השלילי הוא בגלל שכוח זה מכוון נגד העתק הגוף ביחס לנקודת המרכז שהיא הנקודה שבה הכוח המחזיר מתאפס.



איור 1

אם נסמן את אורך קטע המסלול מול הזווית α ב- x ($AB = x$) (ראה איור 1), נקבל שגודלה של הזווית α (ברדיאנים) נתון על ידי:

$$\alpha(\text{rad}) = \frac{x}{\ell} \qquad (2)$$

נציב α בביטוי (1), ונקבל שהכוח המחזיר הפועל על הגוף בתנועתו המחזורית הוא:

$$F = -mg\sin\left(\frac{x}{\ell}\right) \qquad (3)$$

כוח מחזיר זה אינו נמצא ביחס ישר עם תזוזת הגוף, x, ביחס לנקודת שבה הכוח המחזיר מתאפס (הנקודה B באיור 21). לכן תנועת הגוף אינה תנועה הרמונית פשוטה. במקרה זה לא ניתן למצוא ביטויים מתמטיים המתארים את זמן המחזור של התנועה או התדירות שלה.

לעומת זאת, אם הזווית α (ברדיאנים) קטנה, מתקיים הקשר: $\sin\alpha \approx \alpha$. על סמך קשר זה נקבל שעבור תנודה בזוויות קטנות מתקיים:

$$F = -mg\sin\left(\frac{x}{\ell}\right) \approx -\frac{mg}{\ell}x \qquad (4)$$

רואים שבמקרה של זוויות קטנות, הכוח המחזיר נמצא ביחס ישר לתזוזה ביחס לנקודה שבה הכוח המחזיר מתאפס (הנקודה B באיור 21), כלומר הכוח המחזיר הוא מהצורה $F = -kx$, כאשר קבוע הפרופורציה כאן הוא:

$$k = \frac{mg}{\ell} \qquad (5)$$

מסקנות:

1. בזוויות קטנות, התנועה המחזורית של המטוטלת היא תנועה הרמונית פשוטה כי הכוח המחזיר בתנועה זו הוא מהצורה $F = -kx$, כאשר $k = mg/\ell$.
2. אם נשווה בין תנועת המטוטלת בזוויות קטנות, לתנועת גוף בהשפעת כוח מחזיר שמקורו קפיץ, נקבל שהכוח המחזיר בשני המקרים זהה ונתון על ידי הביטוי $F = -kx$. עבור התנועה בהשפעת הקפיץ k הוא קבוע הקפיץ ועבור המטוטלת המתמטית $k = mg/\ell$.
3. מכיוון שזמן המחזור בתנועה ההרמונית הפשוטה עבור גוף הנע בהשפעת כוח הקפיץ נתון על ידי הקשר $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, נקבל, באופן דומה, שזמן המחזור של מטוטלת מתמטית נתון על ידי:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (6)$$

ומכאן:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg/\ell}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \qquad (7)$$

נשאלת לבסוף השאלה: מהו תחום הערכים עבור הזווית α שבו הזוויות נחשבות לזוויות קטנות כך שהקירוב $\sin\alpha \approx \alpha$ נחשב לנכון?

ניתן לבדוק באמצעון מחשבון שהקירוב $\sin\alpha \approx \alpha$ (בראדיאנים) מתקיים עבור זוויות שהן קטנות מ $0.4\,\text{rad}$ (כ- 20°).

ג. מכשור וציוד

(1) חוט דק וארוך.
(2) גוף מתכתי קטן.
(3) סטופר.
(4) סטנד.

(5) סרגל.
(6) תפסן.
(7) נייר דבק.

ד. הניסוי (בניית המערכת וביצוע הניסוי)

בניסוי קיימים שני חלקים.

החלק הראשון

(1) הדק את התפסן במוט האופקי שבסטנד.
(2) קשור את הגוף המתכתי הקטן לקצה אחד של החוט. מדוד קטע של החוט באורך $30\,\mathrm{cm}$ וזאת החל מהגוף. את הקצה השני של קטע זה החזק באמצעות התפסן שעל הסטנד.
(3) הסט את הגוף מנקודת שווי המשקל בזווית קטנה (פחות מ-20 מעלות), ושחרר אותו ממנוחה.
(4) מדוד באמצעות הסטופר את הזמן שלוקח לגוף להשלים 10 מחזורים, שנסמן אותו ב-t_{10}. רשום זמן זה ואת אורך החוט ℓ.
(5) חזור על אותה מדידה מספר פעמים, כך שבכל פעם שנה את אורך החוט (הגדל את אורך החוט ב-10 ס"מ ממדידה למדידה). שים לב: על מנת שהגוף לא יפגע בשולחן במהלך תנועתו, יש להניח את הסטנד קרוב לקצה השולחן כך שהמוט האופקי הקשור אליו יבלוט ביחס לקצה השולחן, וכך תנועת המטוטלת תהיה רחוקה מהשולחן.
(6) קבע את התוצאות בטבלה הבאה:

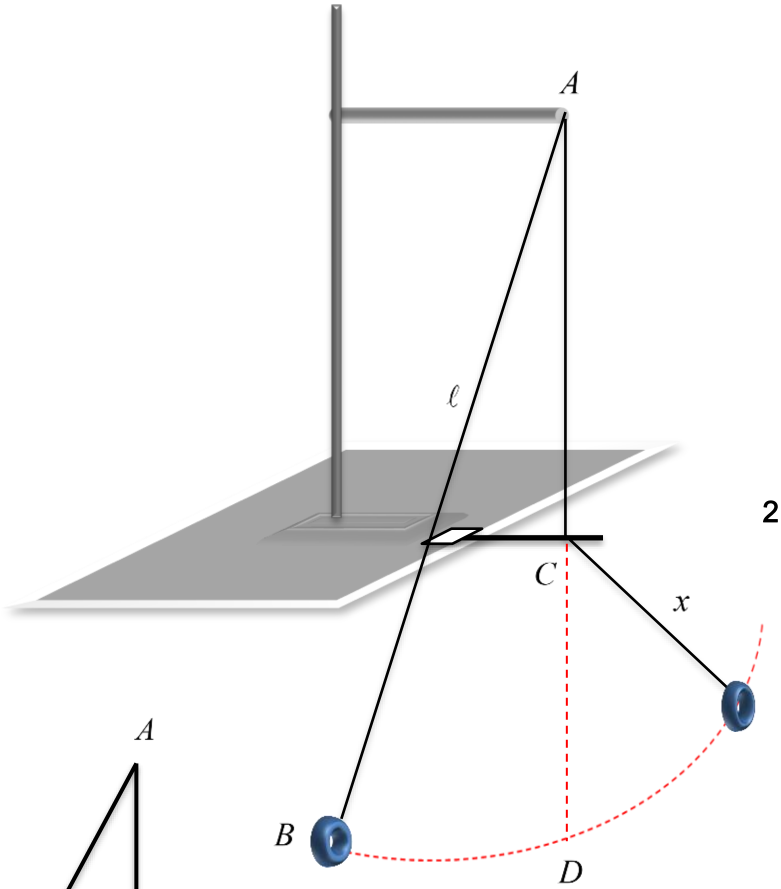
$\ell\,(\mathrm{m})$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$t_{10}\,(\mathrm{s})$						

החלק השני

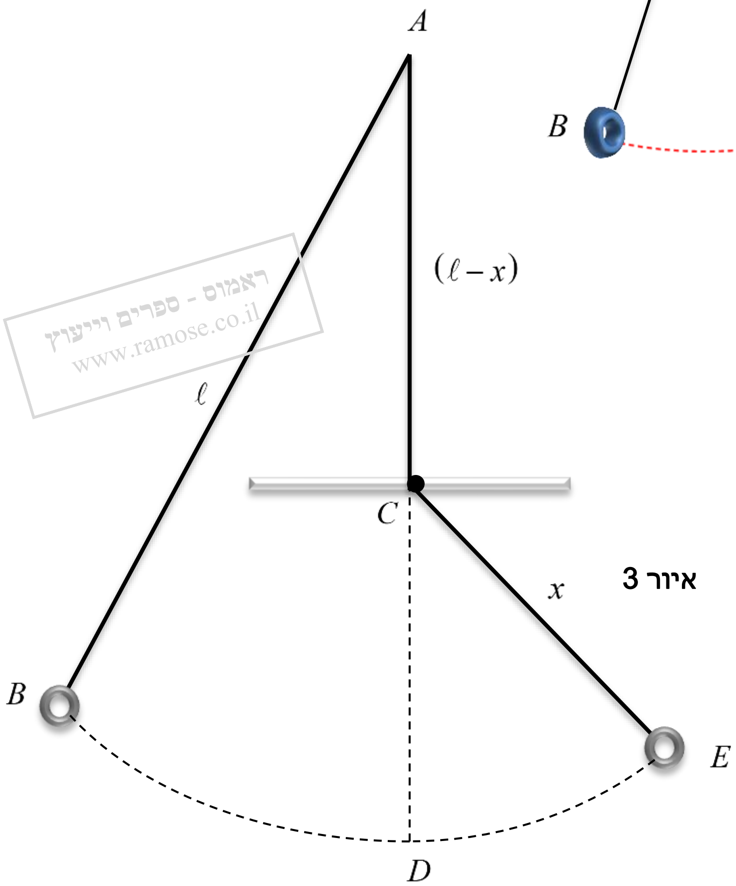
(1) הנח את הסטנד ליד קצה השולחן כך שהמוט האופקי המוחזק בו בולט מעבר לקצה של השולחן.
(2) קשור את הגוף המתכתי הקטן לקצה אחד של החוט ואת הקצה השני של החוט החזק בתפסן, כך שאורך החוט יהיה $90\,\mathrm{cm}$. אורך זה יישאר קבוע לאורך כל מהלך הניסוי.
(3) הדבק באמצעות נייר דבק מוט דק על השולחן כך שיהיה ניצב לקצה השולחן ויבלוט החוצה ביחס לקצה השולחן.
(4) כוון את המעמד כך שהחוט נוגע במוט במצב שבו המשקולת שקשורה אליו נמצאת במנוחה (ראה איור 1 או איור 2).
(5) כוון את גובה המוט האופקי הקשור למעמד כך שאורך החוט הנמצא מתחת למוט האופקי המודבק לשולחן (הקטע המסומן ב-x באיורים 1 או 2) הוא $20\,\mathrm{cm}$.
(6) הסט את המשקולת הצידה ושחרר אותה ממנוחה. נוצרת תנועה מחזורית המורכבת משתי מטוטלות מתמטיות. מטוטלת אחת באורך $\ell = 0.9\,\mathrm{m}$ והשנייה באורך x. זמן המחזור בתנועה זו מורכב מחצי זמן מחזור של המטוטלת מתמטית בעלת האורך $\ell = 0.9\,\mathrm{m}$ והחצי השני הוא חצי זמן המחזור של מטוטלת מתמטית בעלת אורך x.
(7) מדוד את הזמן שלוקח למטוטלת המורכבת הזו להשלים 10 מחזורים. סמן זמן זה ב-t_{10}. רשום את ערכו ואת הערך של x.
(8) חזור על אותה מדידה מספר פעמים, כך שבכל פעם מנמיכים את נקודת האחיזה של המוט האופקי בסטנד. בכך x גדל (ℓ אורך החוט נשאר קבוע). בכל מדידה הגדל את x ב-$10\,\mathrm{cm}$. רשום את t_{10} המתקבל ואת x.
(9) קבע את התוצאות בטבלה הבאה:

$x\,(\mathrm{cm})$	$t_{10}\,(\mathrm{s})$

20	
30	
40	
50	
60	
70	



איור 2



איור 3

ה. עיבוד התוצאות

החלק הראשון

(1) על סמך הטבלה שקיבלת בחלק זה של הניסוי, הכן טבלה חדשה הכוללת 3 עמודות: בעמודה הראשונה רשום את אורכי החוט במדידות השונות, בעמודה השנייה רשום את ערכי זמן המחזור $\left(T=t_{10}/10\right)$, ובעמודה השלישית את ריבוע זמן המחזור $\left(T^2\right)$.

(2) שרטט גרף פיזור המתאר את T^2 כפונקציה של ℓ.

(3) העבר קו מגמה וחשב באמצעות קו זה את תאוצת הכובד.

יש לשים לב לכך שהאורכים צריכים להיות ביחידות מטר והזמנים בשניות.

החלק השני:

(4) על סמך הטבלה שקיבלת בחלק זה של הניסוי, הכן טבלה חדשה הכוללת 2 עמודות: בעמודה הראשונה רשום את השורש הריבועי של האורכים x $\left(\sqrt{x}\right)$- ובעמודה השנייה רשום את ערכי זמן המחזור $\left(T=t_{10}/10\right)$. שים לב שיחידות האורך צריכות להיות במטרים.

(5) שרטט גרף פיזור המתאר את T כפונקציה של $\sqrt{x}$.

(6) העבר קו מגמה וחשב באמצעות קו זה את: תאוצת הכובד ואורך החוט ℓ (שהוא אמור להיות $0.9\,\text{m}$).

ו. שאלות הכנה

(1) הסבר מדוע בחלק הראשון של הניסוי משרטטים גרף המתאר את T^2 כפונקציה של ℓ ולא T כפונקציה של ℓ.

(2) הוכח שזמן המחזור בתנועה המחזורית הנוצרת בחלק השני של הניסוי נתון על ידי:

$$T=\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}+\pi\sqrt{\frac{x}{g}}$$

(3) הסבר מדוע בחלק השני של הניסוי משרטטים גרף המתאר את T כפונקציה של $\sqrt{x}$ ולא T^2 כפונקציה של x.

(4) הסבר מדוע מודדים את הזמן של 10 מחזורים ולא מסתפקים במדידת זמן מחזור אחד.

(5) תאר את צורת הגרף המתאר את T כפונקציה של $\sqrt{x}$ בחלק השני של הניסוי, וקבע מה מייצג כל אחד מהגדלים הבאים:

א. שיפוע הגרף.

ב. נקודת החיתוך עם הציר האנכי.

ג. נקודת החיתוך עם הציר האופקי.