

סוג הבחינה: בגרות

מועד הבחינה: חורף תשע"ט, 2019

מספר השאלון: 035582

נספח: דפי נוסחאות ל-5 יחידות לימוד

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

(3) לטיוטה יש להשתמש במחברת הבחינה.

שימוש בטיוטה אחרת עלול לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מן השאלות 1-3 (לכל שאלה — $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. מעגל שמרכזו M חותך את החלק החיובי של ציר ה-y בנקודה A, כמתואר בציור שלפניך.

ממרכז המעגל העבירו אנך לציר ה-y, החותך את הציר בנקודה E.

נתון כי $AE = 6$.

נתון גם כי מרחק הנקודה M מראשית הצירים הוא מחצית מן האורך

של רדיוס המעגל.

א. הוכח כי המקום הגאומטרי של כל הנקודות M המקיימות את נתוני השאלה

נמצא על אליפסה, ומצא את משוואתה.

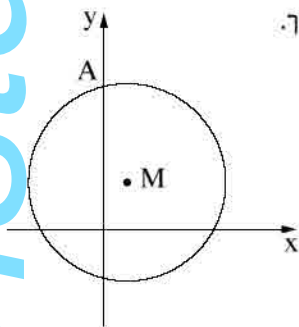
נסמן ב- F_1 וב- F_2 את מוקדי האליפסה שאת משוואתה מצאת בסעיף א.

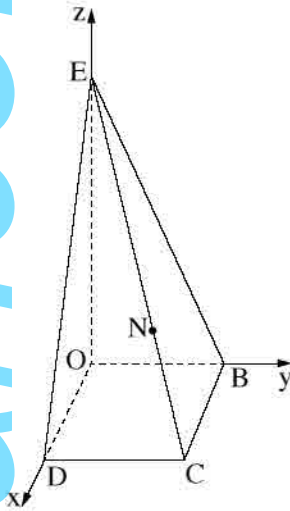
הנקודות D_1 ו- D_2 הן נקודות על האליפסה.

שיעור ה-y של D_1 חיובי ושיעור ה-y של D_2 שלילי.

ב. (1) מצא את השטח הגדול ביותר האפשרי עבור המרובע $F_1 D_1 F_2 D_2$. נמק.

(2) האם קיים מרובע $F_1 D_1 F_2 D_2$ בעל היקף גדול ביותר? נמק.





2. נתונה פירמידה OBCDE שבסיסה OBCD הוא ריבוע.

המקצוע OE מאונך למישור הבסיס.

נתון: $OE = 12$, $OD = 4$.

מיקמו את הפירמידה במערכת צירים כך שהנקודה O היא ראשית הצירים

והנקודות E, B, D נמצאות על הצירים x, y, z בהתאמה (כמתואר בציור).

א. מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר EC.

הנקודה N נמצאת על המקצוע EC. מן הנקודה N מורידים אנך

לבסיס הפירמידה החותך אותו בנקודה F. מרחק הנקודה F מציר ה-y הוא 3.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N.

ג. מצא את גודל הזווית שבין המישור BCN ובין בסיס הפירמידה OBCD.

K היא נקודה על המקצוע EC כך ש-KOBCD היא פירמידה ישרה (בסיס הפירמידה).

ד. מצא את ההצגה הפרמטרית של הישר שעליו מונח הגובה לבסיס מן הנקודה K.

3. א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^3 = \bar{z}$, $z \neq 0$. הוא מספר מרוכב.

ב. (1) מצא את משוואת המקום הגאומטרי של כל הנקודות במישור גאוס המקיימות $z^2 \cdot (\bar{z})^2 = 1$.

(2) הראה כי כל הפתרונות של המשוואה בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי שמצאת

בתת-סעיף ב(1).

ג. (1) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית 45°

(נגד כיוון השעון). נתון שכל אחת מן הנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב מתאימה למספר המקיים

את המשוואה $z^4 = a$.

מצא את a.

(2) את הנקודות שמתאימות לפתרונות המשוואה שמצאת בסעיף א מסובבים בזווית α (נגד

כיוון השעון).

הוכח שסכום המספרים המתאימים לנקודות המתקבלות לאחר הסיבוב שווה ל-0.

**פרק שני – גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,
פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות** (33 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{e^{ax} - e^x}{e^{ax} - 3e^x + 2}$, a הוא פרמטר.

לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית $x = \ln 2$.

א. מצא את a .

הצב את הערך של a שמצאת, וענה על הסעיפים ב-ה.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ והראה כי עבור כל $x \neq 0$ בתחום מתקיים: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.

ג. (1) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את תחומי העלייה ואת תחומי הירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה $h(x) = \left| \frac{e^x}{e^x - 2} - \frac{1}{2} \right|$.

ד. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $h(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(3) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $h(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x = \ln 8$

והישר $x = \ln 16$.

נתון: הפונקציה $h(x)$ סימטרית ביחס לישר $x = \ln 2$.

הנקודות A ו- B נמצאות על גרף הפונקציה $h(x)$, והן סימטריות ביחס לישר $x = \ln 2$.

שיעור ה- x של הנקודה A הוא $\ln 8$.

ה. מצא את שיעורי הנקודה B .

5. $f(x)$ היא פונקציה גזירה לכל x בתחום ההגדרה שלה.

א. הראה שלפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $e^{f(x)}$ יש נקודות קיצון באותם שיעורי x , ונקודות הקיצון האלה הן מאותו סוג (מינימום או מקסימום).

נתון כי $f(x) = x \ln(x^n)$. n הוא פרמטר טבעי.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. התייחס לערכים שונים של n .

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x . התייחס לערכים שונים של n .

נתון: גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות.

ד. (1) הראה כי הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן (אם צריך – הבע באמצעות n).

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ עבור $n = 2$.

ה. היעזר בתשובתך על סעיף א, מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $e^{x \ln(x^n)}$ (n טבעי), וקבע את סוגן (אם צריך – הבע באמצעות n).

בהצלחה!