

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון שני

הוראות לנבחן

א. משך הבחינה: שעתיים ורבע.

ב. מבנה השאלון ומפתח ההערכה: בשאלון זה שני פרקים.

פרק ראשון — גאומטריה אנליטית, וקטורים,

טריגונומטריה במרחב, מספרים מרוכבים — $33\frac{1}{3} \times 2$ — $66\frac{2}{3}$ נקודות

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות — $33\frac{1}{3} \times 1$ — $33\frac{1}{3}$ נקודות

סה"כ — 100 נקודות

ג. חומר עזר מותר בשימוש:

(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון הניתן לתכנות.

שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.

(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. הוראות מיוחדות:

(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.

(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, גם כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.

הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב במחברת הבחינה בלבד. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.

כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

השאלות

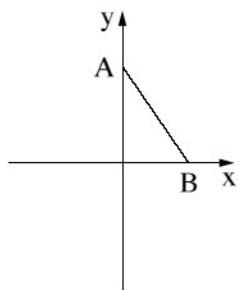
שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה. חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

פרק ראשון – גאומטריה אנליטית, וקטורים, טריגונומטריה במרחב,

מספרים מרוכבים ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על **שתיים** מן השאלות 1-3 (לכל שאלה – $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.



1. אורך הקטע AB הוא 4.

נתון: הנקודה A נמצאת על ציר ה- y , והנקודה B נמצאת על ציר ה- x (ראה ציור).

הנקודה M היא אמצע הקטע AB.

א. מצא את המשוואה של המקום הגאומטרי

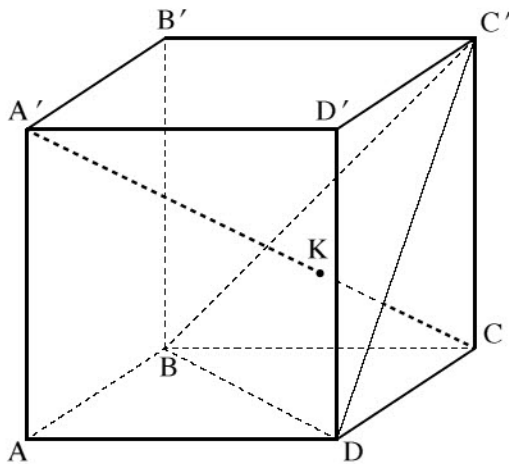
של כל הנקודות M שנבנו כך, וזֶה את המקום הגאומטרי הזה.

נתון: הנקודה L נמצאת על הקטע AB כך ש- $\frac{AL}{LB} = t$. $t > 0$ הוא פרמטר.

ב. הבע באמצעות t את המשוואה של המקום הגאומטרי של כל הנקודות L שנבנו כך, וזֶה את המקום הגאומטרי הזה.

ג. בעבור איזה ערך של t המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב מתלכד עם המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א? נמק.

ד. האם קיים $t > 0$ שבעבורו המקום הגאומטרי שמצאת בסעיף ב חותך את ציר ה- x בנקודה $(5, 0)$? נמק.



2. $ABCD A' B' C' D'$ היא קובייה שאורך צלעה הוא 6 (ראה ציור).

הנקודה B נמצאת על ראשית הציורים.

א. חשב את גודל הזווית שבין הקטע $A'C$ ובין הקטע BC' .

ב. הוכח שהישר $A'C$ מאונך למישור $BC'D$.

הנקודה K היא נקודת החיתוך של הישר $A'C$

עם המישור $BC'D$.

ג. מצא את היחס $\frac{A'K}{A'C}$.

הנקודה O היא נקודת החיתוך של

אלכסון הבסיס AC עם אלכסון הבסיס BD.

ד. הוכח שהנקודה K נמצאת על הקטע $C'O$.

3. א. (1) הוכח כי לכל מספר מרוכב z מתקיים $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

(2) הוכח כי אם המספר המרוכב z נמצא על מעגל היחידה,

אז גם המספר $\frac{1}{z}$ נמצא על מעגל היחידה.

ב. (1) הראה כי בעבור כל מספר מרוכב z הנמצא על מעגל היחידה, הסכום $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

(2) z_1 ו- z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה.

נתון כי הרכיבים המדומים של z_1 ו- z_2 הם חיוביים.

הוכח כי אם: $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ אז z_1 ו- z_2 נמצאים ברביע הראשון.

$w = 1 \cdot \text{cis}(\alpha)$ הוא מספר מרוכב. נתון: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

נתונה סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{w}$ והאיבר השני הוא w .

נתון כי סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה הנדסית שווה ל-0.

ג. (1) הבע באמצעות α את מנת הסדרה, והסבר מדוע כל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.

(2) מצא את α (מצא את שתי האפשרויות).

פרק שני — גדילה ודעיכה, פונקציות חזקה, פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 נקודות)

ענה על אחת מן השאלות 4-5.

שים לב: אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$, המוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה- x .

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. (1) הוכח כי $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$.

(2) הסבר מדוע גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא כולו מתחת לישר $y = x$.

ד. נתונה הפונקציה $g(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ המוגדרת לכל x .

(1) מה הם תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) $a > 1$ הוא פרמטר.

היעזר בנגזרת הפונקציה $f(x)$ והראה כי נפח גוף הסיבוב של השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

על ידי הצירים ועל ידי הישר $x = \ln a$ שווה ל- $\pi \ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)$. פרט את חישוביך.

5. נתונה משפחת הפונקציות $f(x) = \frac{e^{-mx}}{1+x^2}$. m הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ב בעבור $m \geq 0$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציות $f(x)$?

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציות $f(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

(3) נתון כי כל הפונקציות $f(x)$ מן המשפחה חותכות זו את זו בנקודה אחת. מצא את שיעוריה.

ב. (1) בעבור $m \geq 0$, מצא את הערכים של m שבעבורם הנגזרת $f'(x)$:

(i) אינה מתאפסת בשום נקודה.

(ii) מתאפסת בנקודה אחת בדיוק.

(iii) מתאפסת בשתי נקודות בדיוק.

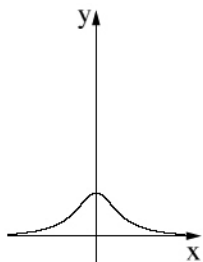
(2) בסוף השאלה נתונים שלושה גרפים (III-I) של פונקציות מן המשפחה $f(x)$ בעבור $m \geq 0$.

ידוע כי $m \neq 1$ וכי כל אחד מן הגרפים מתאים לערך או לטווח ערכים אחר של m .

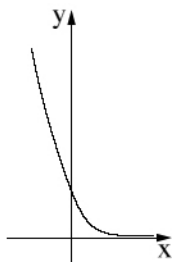
התאם לכל גרף מבין השלושה את הערך או את טווח הערכים של m המתאים לו. נמק.

ענה על סעיף ג. תוכל להיעזר בגרף המתאים מבין הגרפים III-I.

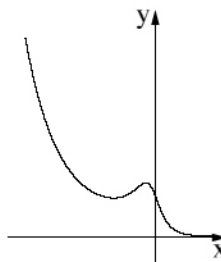
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(-x)$ בעבור $0 < m < 1$.



III



II



I

בהצלחה!